Nachklausur zur Vorlesung MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK — WiSe 2011/12

Prof. Dr. Norbert Dragon

23.03.2012, 9:30-12:00 Uhr — PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

Name: ______________________

Matrikelnr.: ______________________

#	K0	K1	K2	K3	K4	K5	Σ
Pkte							

[K0] *Kurzfragen* **[1 + 1 + 1 + 1 = 4 Punkte]**

Alle Fragen lassen sich in einem Satz oder mit einer Formel beantworten.

(a) Welche Größe ist bei Invarianz unter Translationen erhalten?

(b) Welche Kraft gehört zum Potential $V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$?

(c) Wie hängt die Umlaufzeit T im Keplerproblem von der Bahngröße (große Halbachse a der Ellipse) ab?

(d) Ein relativistisches Punktteilchen der Ruhemasse m bewege sich mit der konstanten Geschwindigkeit v ($c = 1$). Welche Energie hat das Teilchen?

[K1] *Summenkonvention* **[2 + 1 + 1 = 4 Punkte]**

Für das ϵ-Symbol gilt

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}\,.$$

Berechnen Sie daraus explizit unter Beachtung der Einstein'schen Summenkonvention

(a) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}\delta_{nk}$,

(b) $\delta_{ik}\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk}$ und

(c) $\epsilon_{lmn}\epsilon_{lmn}$.

[K2] *Eigenwerte und Eigenvektoren* **[3 + 1 + 2 = 6 Punkte]**

Ein nichtrelativistisches Teilchen der Masse m bewege sich unter der Wirkung der Kraft

$$F(\vec{x}) = -m\omega^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenvektoren, in deren Richtung die Kraft entgegengesetzt zur Auslenkung wirkt, sowie die zugehörigen Eigenwerte.

(b) Bestimmen Sie die Winkel zwischen den Eigenvektoren.

(c) Bestimmen Sie das zugehörige Potential.

[K3] *Erhaltungssätze* **[1 + 1 + 2 + 2 = 6 Punkte]**

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich im Potential $V(\vec{x}) = -\kappa/r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(a) Warum sind die Energie E und der Drehimpuls $\vec{L}$ erhalten?

(b) Warum ist die Bahn eben?

(c) Geben Sie die Energie und den Drehimpuls in Kugelkoordinaten an. *Hinweis*: z-Achse gut wählen!

(d) Kombinieren Sie beide Erhaltungssätze zu einem Energiesatz, in dem nur der Freiheitsgrad $r(t)$ auftritt.

[K4] *Kräfte und Potentiale* **[3 + 3 = 6 Punkte]**

Geben Sie die zu den folgenden Potentialen gehörenden Kraftfelder an und skizzieren Sie die Äquipotentiallinien in der xy-Ebene, d.h. für $z = 0$. Prüfen Sie, welche der Kraftfelder Zentralfelder sind.

(a) $V(\vec{r}) = A(x^4 + y^4 + z^4)$, $A = \text{const}$;

(b) $V(\vec{r}) = a/r^2 - b/r$, $a, b = \text{const}$.

Hinweis: Bei einem Zentralfeld gilt $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$ mit $r = |\vec{r}|$.

[K5] *Wegintegrale* **[2 + 2 = 4 Punkte]**

Berechnen Sie die Weglänge $\ell[\Gamma] = \int_{\underline{t}}^{\overline{t}} \mathrm{d}t \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2}$ für die folgenden Bahnkurven:

(a) $\Gamma : t \mapsto \vec{r}(t) = (\cos\omega t, \sin\omega t, \sqrt{1 - (\omega t)^2})$ zwischen $\underline{t} = 0$ und $\overline{t} = 1/\omega$. *Hinweis*: Die Ableitung von $\arcsin x$ ist $1/\sqrt{1 - x^2}$.

(b) $\Gamma : t \mapsto \vec{r}(t) = (t, at^2, 0)$ zwischen $\underline{t} = 0$ und $\overline{t} = 1$. *Hinweis*: Die Ableitung von $F(x) = \frac{1}{2}(x\sqrt{1 + x^2} + \ln|x + \sqrt{1 + x^2}|)$ ist $\sqrt{1 + x^2}$.