Prof. Dr. Norbert Dragon
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
19.-21.12.2011

PARTIELLE ABLEITUNGEN

Wir üben den Umgang mit partiellen Ableitungen.

[P25] *Symmetrie*
Ein Potential $V(x) = \frac{1}{2}\kappa_{ij}x^i x^j$ hänge quadratisch von den Variablen $x^1, x^2, \ldots, x^n$ ab. Zeigen Sie, dass man die Koeffizienten κ_{ij} aus symmetrischen und antisymmetrischen Anteilen zusammensetzen kann, d.h.

$$\kappa_{ij} = s_{ij} + a_{ij} \quad \text{mit} \quad s_{ij} = s_{ji}\,, \quad a_{ij} = -a_{ji}\,,$$

indem Sie s_{ij} und a_{ij} durch κ_{ij} ausdrücken. Warum trägt nur der symmetrische Anteil von κ_{ij} zum Potential bei, $V(x) = \frac{1}{2}s_{ij}x^i x^j$?

[P26] *Partielle Ableitungen*
Welchen Wert haben die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x^k}{\partial x^l}$, $k, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$? Berechnen Sie hiermit und mit der Produktregel die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x^k}V$ und $\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^l}V$ von $V(x) = \frac{1}{2}\kappa_{ij}x^i x^j$.

[P27] *Änderung der Determinante*
Die Determinante einer Matrix M,

$$\det M = \epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} M^{i_1}{}_1 M^{i_2}{}_2 \ldots M^{i_n}{}_n\,,$$

aufgefasst als Funktion eines herausgegriffenen Matrixelements $x = M^i{}_j$, ist linear inhomogen, also von der Form $\det M = ax + b$.

(a) Geben Sie den zu $M^i{}_j$ gehörigen Faktor a als Polynom der Matrixelemente an.

(b) Wie hängt er mit $\det M$ und den Matrixelementen $(M^{-1})^k{}_l$ der inversen Matrix zusammen?

(c) Was ist die partielle Ableitung von $\det M$ nach $M^i{}_j$?

Hinweis: Diese Betrachtungen zeigen, dass sich bei Änderung der Matrix M um $\mathrm{d}M$ die Determinante wie folgt ändert:

$$\mathrm{d}(\det M) = \det M (M^{-1})^k{}_l \mathrm{d}M^l{}_k = \det M\, \mathrm{Sp}(M^{-1}\mathrm{d}M)\,.$$