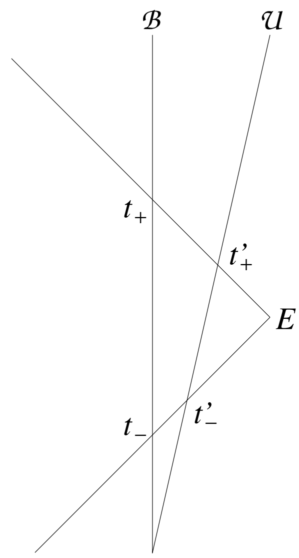
SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE, ABLEITUNGEN

Ein grundlegendes Resultat von Einsteins spezieller Relativitätstheorie soll nachvollzogen und das Ableiten von Funktionen geübt werden.

[P19] *Dopplerbeziehung*

Betrachten Sie das nebenstehende Diagramm, das zwei gegeneinander bewegte Beobachter $\mathcal{B}$ und $\mathcal{U}$ zeigt, die ein Ereignis E in der t-x-Ebene wahrnehmen.



(a) Lesen Sie aus dem nebenstehenden Raumzeitdiagramm die Dopplerbeziehungen zwischen den Zeiten t'_+ und t_+ sowie t'_- und t_- ab, die die beiden Beobachter dem Ereignis E zuschreiben.

(b) Verwenden Sie die Geschwindigkeitsabhängigkeit des Dopplerfaktors, $\kappa^2 = (1+v)/(1-v)$, und $t_\pm = t \pm x$ zur Herleitung von

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = L(v) \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} , \quad L(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v & 1 \end{pmatrix} .$$

Hinweis: Erinnern Sie sich an [P17].

(c) Zeigen Sie $L(u)L(v) = L(w)$ und bestätigen Sie so für die resultierende Gesamtgeschwindigkeit w das Geschwindigkeitsadditionstheorem.

[P20] *Ableitungen*

(a) Berechnen Sie aus den Ableitungen von $\sin x$ und $\cos x$ im Bereich $-\pi/2 < x < \pi/2$ die Ableitung von Arcus tangens, $\arctan(\tan x) = x$ mit $\tan x = \sin x / \cos x$.

(b) Bestimmen Sie durch wiederholtes Ableiten die Potenzreihe der Funktion $(1+x)^\alpha$ als Reihe in x. Welche Reihe ist $1/(1-x)$?