
ABLEITUNGEN, POTENTIALE, FELDER

Wir erarbeiten wichtige Techniken der Analysis, die in der Physik von größter Bedeutung sind.

[P21] *Harmonischer Oszillator*
Es sei $x(0)$ die anfängliche Auslenkung und $\dot{x}(0) = v(0)$ die anfängliche Geschwindigkeit eines harmonischen Oszillarors $x(t)$, der gemäß $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$ schwingt.

(a) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_n der Potenzreihe $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a_n t^n$.

(b) Zeigen Sie, dass $x(t)$ die Überlagerung (Superposition) zweier trigonometrischer Funktionen ist, und fassen Sie beide zu einer zusammen.

[P22] *Koordinatenwechsel*
Wir betrachten die Kugelkoordinaten, definiert wie folgt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} , \qquad \begin{array}{rcl} r &=& \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &=& \arctan(\sqrt{x^2+y^2}/z) \\ \varphi &=& \arctan(y/x) \end{array} .$$

(a) Berechnen Sie die Basisvektoren

$$\partial_r \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_r(r,\theta,\varphi)\vec{e}_r , \quad \partial_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_\theta(r,\theta,\varphi)\vec{e}_\theta , \quad \partial_\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_\varphi(r,\theta,\varphi)\vec{e}_\varphi .$$

Bestimmen Sie dabei die Vorfaktoren c_r, c_θ und c_φ so, dass $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\varphi$ Einheitsvektoren sind.

(b) Zeigen Sie, dass $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\varphi$ paarweise senkrecht aufeinander stehen, also eine Orthonormalbasis bilden.

(c) Bestimmen Sie die neun Ableitungen $\partial_i r$, $\partial_i \theta$ und $\partial_i \varphi$ mit $i \in \{x, y, z\}$.