ABLEITUNGEN, POTENTIALE, FELDER II

Wir erarbeiten uns mehr Routine im Umgang mit Ableitungen und Feldern.

[P23] *Kraft und Potential*

Ein nichtrelativistisches Teilchen der Masse m bewege sich in der xy-Ebene unter der Wirkung der Kraft

$$\begin{pmatrix} F_x(\vec{r}) \\ F_y(\vec{r}) \end{pmatrix} = -m\omega^2 \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} . \tag{1}$$

(a) Wie lautet das zugehörige Potential $V(\vec{r})$?

(b) An welchen Orten zeigt die Kraft zum Ursprung?

(c) Wie lauten die Lösungen der Bewegungsgleichungen, die nur solche Orte durchlaufen? *Hinweis*: Die Bewegungsgleichung ergibt sich aus (1) dadurch, dass Sie nach Newton $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}(t)$ setzen.

(d) Wie lautet die allgemeine Lösung?

(e) Überprüfen Sie für die allgemeine Lösung, dass die Energie $E = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2(t) + V(\vec{r}(t))$ zeitunabhängig ist.

[P24] *Ebene Wellen*

Betrachten Sie sechs *beliebige* Funktionen $\vec{E}(u)$ und $\vec{B}(u)$, die von $(t, \vec{x})$ nur über $u(\vec{x}, t) = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t$ abhängen. Hierbei sind $\vec{k}$ und ω konstant.

(a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} \vec{B}(u)$.

(b) Berechnen Sie $\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(u)$.

(c) Wann gilt demnach $\operatorname{rot} \vec{B}(u) - \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(u) = 0$ und wann $\operatorname{rot} \vec{E}(u) + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(u)$?

(d) Die *Divergenz* eines Vektorfeldes ist definiert als $\operatorname{div} \vec{A} = \partial_i A^i$. Wann gilt $\operatorname{div} \vec{E}(u) = 0$, und wann $\operatorname{div} \vec{B}(u) = 0$?

(e) Auf welchen Flächen nehmen $\vec{E}(u)$ und $\vec{B}(u)$ konstante Werte an?