Prof. Dr. Holger Frahm
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

Abgabe 15.01.2013 vor der Vorlesung

---

## MEHRDIMENSIONALE INTEGRATION

In diesen Aufgaben spielen mehrdimensionale Integrale eine wichtige Rolle, denn sie sind in der Physik sehr oft anzutreffen.

**[H33]** *Integration in krummlinigen Koordinaten* **[$2+2+1=5$ Punkte]**

Bei den folgenden Problemen sollen Sie die Intergrale in den naheliegenden krummlinigen Koordinatensystemen berechnen:

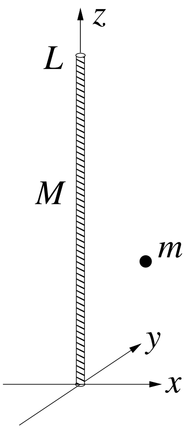
(a) Wir betrachten einen eiförmigen Asteroiden mit konstanter Massendichte $\rho$, der in Kugelkoordinaten die Form $r = a(2-\cos\theta)$ hat. Skizzieren Sie den Querschnitt. Berechnen Sie die Masse $M$ und das Trägheitsmoment für Rotationen um die Symmetrie-Achse. *Hinweis*: Das Trägheitsmoment ist gegeben als $J = \int \mathrm{d}r^3\, \rho(\vec{r})\vec{r}_\perp^{\,2}$, wobei $\vec{r}_\perp$ der zur Rotationsachse $\vec{\omega}$ senkrechte Anteil von $\vec{r}$ ist.

(b) Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\int_S \mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{r}$ durch den Teil der Fläche $z = a^2 - x^2 - y^2$ mit $z \geq 0$. Parametrisieren Sie dazu die Oberfläche durch zwei Winkel $\theta$ und $\phi$ mit $x = a\sin\theta\cos\phi$, $y = a\sin\theta\sin\phi$. Wie ist dann $z$ gegeben? Es ist $\phi\in[0,\pi]$, welchen Wertebereich hat $\theta$ demnach?

(c) Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r}) = \alpha\vec{r}/(r^2+a^2)^{3/2}$ durch die Oberfläche der Kugel mit Radius $\sqrt{3}a$.

**[H34]** *Stabförmiges Ufo* **[$2+2+2=6$ Punkte]**

Am 21.12.2012 wurde ein merkwürdiger stabförmiger Himmelskörper entdeckt. Er erstreckt sich auf der $z$-Achse von 0 bis $L$ und hat eine vernachlässigbare Ausdehnung in $x$- und $y$-Richtung. Seine lineare Massendichte ist konstant, $\sigma(z) =: \sigma_0 = M/L$. Der Himmelskörper wird von einem kleinen Trabanten der Masse $m$ umkreist.




(a) Berechnen Sie das Potential $V(\vec{r})$, das der Trabant durchfliegt. *Hinweis*: Zwischenergebnis: es ist $V(\vec{r}) \propto -\ln\left(\sqrt{(L-z)^2+\rho^2}+L-z\right) + \ln(|\vec{r}|-z)$ mit $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

(b) Nach expliziter Berechnung von $V(\vec{r})$ interessieren wir uns für den Grenzfall eines in positive $z$-Richtung sehr langen Stabes, $L\to\infty$. Dabei bleiben die Koordinaten $z$ und $\rho$ des Trabanten endlich. Da der führende $V$-Term ($=: V_0$) nicht von $\vec{r}$ abhängt, dürfen wir ihn subtrahieren, auch wenn er im Limes $L\to\infty$ divergiert. Es bleibt ein nur noch von $\sqrt{\rho^2+z^2}-z$, aber nicht mehr von $L$ abhängiger Ausdruck für das Potential. Längs welcher Kurven in der $xz$-Ebene ist das Potential konstant (Skizze)? Wie nimmt es zu, wenn man sich bei fester Höhe $z>0$ dem Stab nähert ($\rho\to 0$)? Und wie verhält es sich für kleine $\rho$ bei negativen $z$?

(c) Schließlich entfernen wir uns genau auf der $z$-Achse nach unten. $V(z)\ \to ?$ Welches asymptotische Verhalten bei $\rho = 0$, $z = -|z| \to -\infty$ hat dagegen plausiblerweise ein Stab endlicher Länge $L$?

*Hinweise*: Falls Sie für ein Integral ein Resultat aus einer Integral-Tafel oder von Mathematica verwenden, geben Sie die Quelle an *und* überprüfen Sie dieses Resultat per Differentation explizit!

**[C5]** *Wegintegrale* **[$1+1+1+1=4$ Punkte]**

Gegeben seien drei Parameterkurven im dreidimensionalen Raum,

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix}\cos(2\pi t)\\ \sin(2\pi t)\\ t\end{pmatrix},\quad \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix}1\\0\\t\end{pmatrix},\quad \vec{r}_3(t) = \begin{pmatrix}1-\frac{1}{2}\sin(\pi t)\\ 0\\ \frac{1}{2}(1-\cos(\pi t))\end{pmatrix},$$

welche für $t\in[0,1]$ von $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ nach $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ führen. Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix}-2xy+z^3\\ -1-x^2\\ 3xz^2\end{pmatrix},\quad \vec{r} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie mit `ParametricPlot3D` die Wege $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ und $\vec{r}_3$ dar.

(b) Berechnen Sie die Arbeit des Kraftfeldes als Wegintegral für $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ und $\vec{r}_3$.

(c) Das Ergebnis von (b) legt eine besondere Eigenschaft des Kraftfeldes $\vec{F}$ nahe. Beweisen Sie diese via $\mathrm{rot}\vec{F} = 0$, und programmieren Sie den dafür notwendigen Differentialoperator rot mit $(\mathrm{rot}\vec{F})_i := \varepsilon_{ijk}\partial_j F_k$ als MATHEMATICA-Funktion.

(d) Berechnen Sie das Potential $V(\vec{r}) = -\int_0^{\vec{r}} \mathrm{d}\vec{s}\cdot\vec{F}(\vec{s})$.

**HINWEIS: Geben Sie auf Ihren Lösungen Name, Vorname & Matrikelnummer an!**