Prof. Dr. Holger Frahm
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
Abgabe 22.01.2013 vor der Vorlesung

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Alle Gleichungen der Physik, die dynamische Vorgänge beschreiben, sind Differentialgleichungen, oder ergeben sich als Lösungen von Differentialgleichungen. Daher ist es besonders wichtig, dass man als Physiker Differentialgleichungen lösen kann.

[H35] *Nicht-polynominale Koeffizienten* **[4 Punkte]**
Bestimmen Sie die vollständige Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$\sin x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y \cos x = 1 \,.$$

[H36] *Gedämpfter harmonischer Oszillator* **[$2 + 1 + 2 + 1 = 6$ Punkte]**
Betrachten Sie die Differentialgleichung für einen schwach gedämpften ($\gamma < 2\omega_0$) harmonischen Oszillator mit äußerer Kraft, der mit seiner Resonanzfrequenz angetrieben wird: $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = F \sin\omega_0 t$.

(a) Geben Sie die allgemeine Lösung des homogenen Problems an!
(b) Damit $x(t)$ reell wird, muss für die beiden Integrationskonstanten der homogenen Lösung aus dem Exponentialansatz $C_1 = C_2^*$ gelten. Bestimmen Sie die Lösungsfunktion der homogenen Gleichung für ein reelles $C = C_1 = C_2$.
(c) Finden Sie mit einer naheliegenden physikalischen Überlegung einen Ansatz für eine spezielle Lösung des inhomogenen Problems. Geben Sie damit die allgemeine Lösung an und skizzieren Sie diese für den reellen Fall $C = C_1 = C_2$.
(d) Zeigen Sie, dass zwischen der entstehenden Schwingung des Oszillators nach dem Einschwingen und der Antriebsschwingung ein Phasenunterschied von $-\pi/2$ besteht, also die Schwingung der Anregung hinterhinkt. Mit welcher Amplitude schwingt der Oszillator nach dem Einschwingen?

[C6] *Allgemeiner gedämpfter Oszillator* **[$2 + 2 + 1 = 5$ Punkte]**
Wir betrachten jetzt den harmonischen Oszillator mit beliebiger Dämpfung γ und mit einer antreibenden Kraft mit beliebiger Frequenz ω. Finden Sie mit MATHEMATICA die allgemeinen Lösung für dieses Problem in den folgenden Fällen und erstellen Sie Plots mit `Animate`, in denen die jeweils geforderten Parameter variiert werden können. Die Differentialgleichung und die Anfgangsbedingungen lauten

$$\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = A_0 \sin(\omega t)\,, \quad x(0) = 1\,, \quad \dot{x}(0) = 0\,.$$

(a) Betrachten Sie zunächst den Fall ohne Anregung, $A_0 = 0$, und studieren Sie die Abhängigkeit von der Dämpfung γ. Diskutieren Sie anhand Ihres Resultates, warum man $\gamma < 2\omega_0$ unterdämpft und $\gamma > 2\omega_0$ überdämpft nennt. Was passiert bei der kritischen Dämpfung $\gamma = 2\omega_0$ eigentlich? *Hinweis*: Hier ist also γ zu variieren.
(b) Nun betrachten wir den Fall mit Anregung, $A_0 = 1$, und unterkritischer Dämpfung (setzen Sie zum Beispiel $\gamma = 0.1$ und $\omega_0 = 1$). Studieren Sie das Verhalten des Oszillators für unterschiedliche Anregungsfrequenzen ω. Diskutieren Sie das Verhalten für $\omega \ll \omega_0$, $\omega \gg \omega_0$ und dann genauer Anregungensfrequenzen in der Nähe der Resonanzfrequenz, $\omega \approx \omega_0$. *Hinweis*: Hier ist also ω zu variieren.
(c) Betrachten Sie die allgemeine Lösung aus (b), aber ohne Anfangsbedingungen. Welcher Teil der Lösung ist die partikuläre Lösung? Welcher Teil der Lösung ist für große Zeiten nur relevant (das sieht man auch in den Plots!)? Warum ist der Fall $\gamma > 2\omega_0$ für angeregte Schwingungen nicht sonderlich interessant?

HINWEIS: Geben Sie auf Ihren Lösungen Name, Vorname & Matrikelnummer an!