
MEHR DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Alle Gleichungen der Physik, die dynamische Vorgänge beschreiben, sind Differentialgleichungen, oder ergeben sich als Lösungen von Differentialgleichungen. Daher ist es besonders wichtig, dass man als Physiker Differentialgleichungen lösen kann.

[H37] *Gekoppelte Systeme* **[$1+2+1+2=6$ Punkte]**

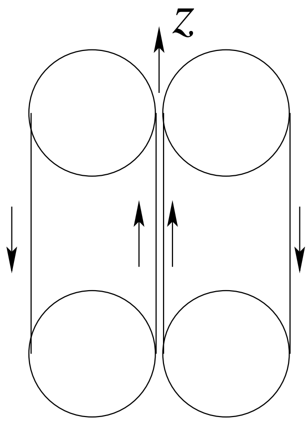
Die skizzierten Keilriemen haben jeweils die Masse M und laufen über masselose, reibungsfreie Rollen. Auf der z-Achse berühren sie sich und erfahren dort eine Reibungskraft, $-M\alpha\, v_{\text{relativ}}$, wobei v_{relaitv} die Relativgeschwindigkeit ist.

(a) Bildet man aus den einzelnen Geschwindigkeiten v_1 und v_2 formal einen Vektor $\vec{v}$, so lässt sich die Bewegungsgleichung in die Form $\dot{\vec{v}} = -\alpha H \vec{v}$ mit einer 2×2-Matrix H bringen. Geben Sie H an.

(b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingung $\vec{v}(0) = \binom{v_0}{0}$, indem Sie die normierten Eigenvektoren $\hat{f}_i$ von H bestimmen und über den Ansatz $\vec{v}(t) = A(t)\hat{f}_1 + B(t)\hat{f}_2$ die zwei resultierenden Bewegungsgleichungen für $A(t)$ und $B(t)$ mit entsprechenden Anfangsbedingungen lösen.

(c) Entspricht der Grenzwert $\lim_{t\to\infty}\vec{v}(t)$ Ihren Erwartungen?

(d) Die Lösung kann auch mit Hilfe von $\exp(-\alpha H t)$ geschrieben werden. Nach Abspalten eines Vorfaktors $\mathrm{e}^{-\alpha t}$ bleibt eine Exponentialfuntkion mit der "Restmatrix" $R = \mathbb{1} - H$ im Argument. Berechnen Sie R^n, $n = 1,2,3,4$. Welche Beobachtung machen Sie? Sortieren Sie damit die Terme in der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion in solche proportional zu R und solche proportional zu $\mathbb{1}$. Diese Beiträge lassen sich jeweils separat aufsummieren. Stimmt das Resultat mit dem zuvor gefundenen überein?



[H38] *Kraftstoß* **[4 Punkte]**

Eine Masse m falle aus einer Höhe h, die Anfangsbedingungen sind also $z(0) = h$, $\dot{z}(0) = 0$. Sie erfährt nun einen Kraftstoß

$$K_3(t) = \gamma\,\delta(t - \sqrt{h/g})\,, \quad \gamma \geq 0\,.$$

Ermitteln Sie $z(t)$. Skizzieren Sie die Lösung für einige typische Werte von γ als Funktion von t. *Hinweis*: Gesamtkraft $F_3 = G_3 + K_3$ mit $G_3 = -mg$.

[C7] *Mathematisches Pendel* **[5 Punkte]**

Das mathematische Pendel, obwohl eine stark vereinfachende Idealisierung eines realen Pendels, gehört bereits zu den Problemen, die keine einfache Lösung haben. Eine punktförmige Masse m sitzt am Ende eines masselosen Fadens der Länge ℓ. Wenn φ den Winkel der Auslenkung bezeichnet, so lautet die Bewegungsgleichung

$$m\ell\,\ddot{\varphi} = -mg\,\sin\varphi\,,$$

stellt also eine nichtlineare Differentialgleichung dar. Für *kleine* Auslenkungen gilt näherungsweise $\sin\varphi \approx \varphi$ und die Bewegungsgleichung geht in diejenige des harmonischen Oszillators über,

$$\ddot{\varphi} \approx -\frac{g}{\ell}\varphi\,.$$

Vergleichen Sie mit MATHEMATICA die Lösung der linearisierten Näherung mit derjenigen der exakten Differentialgleichung für verschiedene Anfangsauslenkungen. Setzen Sie $\ell = 1$ und $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Legen Sie die Anfangsbedingungen in der Form $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$ fest, also über die Geschwindigkeit beim Punkt ohne Auslenkung. Studieren und diskutieren Sie die Fälle $\omega_0 = 0.2\sqrt{g}$, $\omega_0 = 0.7\sqrt{g}$, $\omega_0 = 1.9\sqrt{g}$. Was passiert im Fall $\omega_0 = 2\sqrt{g}$, und wie sieht die Bewegung des mathematischen Pendels für $\omega_0 > 2\sqrt{g}$ aus? *Hinweis*: Die Aufgabe gilt nur als gelöst, wenn Sie die Lösungen mit MATHEMATICA mit `DSolve` bzw. `NDSolve` erhalten, vergleichend für ausreichend lange Zeiten plotten und die daraus folgenden Erkenntnisse auch schriftlich dokumentieren und diskutieren!

HINWEIS: Geben Sie auf Ihren Lösungen Name, Vorname & Matrikelnummer an!