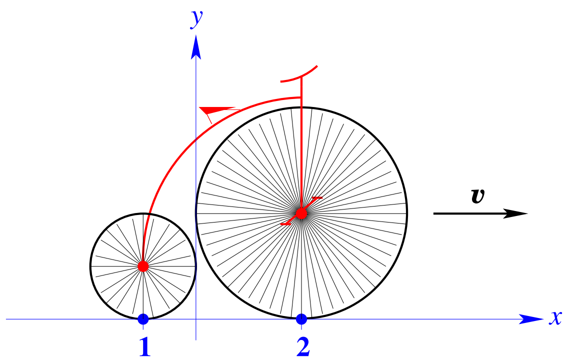
RAUMKURVEN, DIFFERENZIEREN

Bahnkurven sowie deren Ableitungen gehören zu den fundamentalen Objekten, mit denen man in der Mechanik umgeht. Diese sollen hier geübt werden.

[H4] *Altes Fahrrad* **[$1+1+1+1+1+1=6$ Punkte]**

Auf einem altmodischen Fahrrad (Rad-Radien R und $2R$) fährt jemand mit Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_x$ die x-Achse entlang. Die Markierungen **1** und **2** auf den Reifen berühren zur Zeit $t = 0$ gerade gleichzeitig den Boden, und zwar bei

$$\vec{r}_2(0) = \begin{pmatrix} 2R \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}_1(0) = \begin{pmatrix} -R \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Beantworten Sie nun folgende Fragen zu diesem seltsamen Gefährt:

(a) Welche Winkelgeschwindigkeiten $\omega_2 := \omega$ und $\omega_1 = f(\omega)$ haben die Räder?
(b) Was sind die Ortsvektoren $\vec{r}_i(t)$, $i = 1, 2$, der markierten Punkte, und was ist ihre Relativgeschwindigkeit $\vec{v}_{12}(t) := \frac{d\vec{r}_{12}}{dt}$? Hierbei ist $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.
(c) Zu welcher Zeit t_1 haben **1** und **2** erstmals wieder die gleiche Höhe und wo (an welchen Orten) $\vec{r}_i(t_1)$, $i = 1, 2$, befinden sie sich dann?
(d) Zu welcher Zeit t_2 und wo wird der Betrag der Relativgeschwindigkeit am größten? Bestimmen Sie hier t_2 durch genügende Vereinfachung von v_{12}^2.
(e) Zu welcher Zeit t_3 und wo haben **1** und **2** die gleiche Höhenzunahme?
(f) Skizzieren Sie die Lage der Markierungen bei t_1, t_2 und t_3. Entspricht das Resultat der Rechnung der Intuition?

[H5] *Ableitung* **[$2+1+1=4$ Punkte]**

Um die Ableitung f' einer Funktion f zu ermitteln, muss diese keineswegs explizit bekannt sein. Vielmehr genügt die Kenntnis bestimmter Eigenschaften. Dazu ein Beispiel: In der Startphase eines Raketenschlittens wurde zu dessen Geschwindigkeit $v = v_0 f(\omega t)$ experimentell die Beziehung

$$f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = f(x) + f(y)\,, \quad 0 \le x\,, \quad 0 \le xy < 1\,,$$

mit $f(\varepsilon) = \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$ ermittelt.

(a) Diese Informationen reichen völlig aus, um $f'(x)$ zu erhalten. Berechnen Sie die Ableitung also.
(b) Welche Beschleunigung $\dot{v}(t) = \frac{d}{dt}v(t)$ hat der Pilot auszuhalten, welchen Maximalwert hat sie?
(c) Skizzieren Sie den Verlauf von $f'(x)$ über x. Skizzieren Sie mit Ihrem Ergebnis grob-qualitativ auch den Verlauf von $f(x)$.

[H6] *Trigonometrische Identitäten* **[$1+2+2=5$ Punkte]**

Zeigen Sie die folgenden trigonometrischen Sachverhalte mit Hilfe der Vektorrechnung:

(a) Der Cosinussatz für ein ebenes Dreieck;
(b) Die Identität $\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\varphi))$;
(c) Der in der Luft- und Seefahrt wichtige Seiten-Cosinussatz eines sphärischen Dreiecks, $\cos\varphi_{12} = \cos\varphi_{13}\cos\varphi_{23} + \sin\varphi_{13}\sin\varphi_{23}\cos\gamma_3$.

Hinweis: In (c) ist es am besten, jeder der auftretenden trigonometrischen Funktionen ein Skalar- oder Vektorprodukt relevanter Vektoren zuzuordnen. Sollten Ihnen die Cosinus-Sätze nicht vertraut sein, sehen Sie diese in der Literatur (siehe Liste im Stud.IP, z.B. Bronstein) oder auch in der Wikipedia nach.

HINWEIS

Bitte geben Sie unbedingt auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe (Nummer und Name des Tutors) an!