QUER BEET

Dies ist eine Auswahl an Aufgaben, die quer Beet vor allem die Bereiche abdeckt, wo Ihnen besonders viele Hausübungspunkte fehlen. Es wäre schön, wenn Sie diesen Zettel möglichst vollständig bearbeiten könnten.

[E1] *Karussell* **[6 Punkte]**

Ein Karussell mit Radius r sei zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe und wird mit der konstanten Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ beschleunigt. Berechnen Sie mit der Formel aus der Vorlesung $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t + v\frac{\mathrm{d}\vec{e}}{\mathrm{d}t}$ die Tangential- und die Normalbeschleunigung zum Zeitpunkt $t = t_1$. *Hinweis*: Schreiben Sie unter anderem $\vec{e}_t$ in Polarkoordinaten auf und leiten Sie nach der Zeit ab. In welche Richtung zeigt der resultierende Vektor?

[E2] *Störungen* **[6 Punkte]**

Die 2×2 Matrix $H_0 = \mathbb{1}$ hat einen entarteten Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Jeder Vektor ist ein Eigenvektor. Die Matrix wird nun gestört zu $H_1 = H_0 + V(\varepsilon)$. Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_i und die normierten Eigenvektoren $\vec{\psi}_i$, $i = 1, 2$, für die beiden Fälle

$$V = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V = \begin{pmatrix} 3\varepsilon & 4\varepsilon \\ 4\varepsilon & -3\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Was geschieht jeweils im Grenzfall $\varepsilon \to 0$? *Bemerkung*: In der Quantenmechanik ist dies ein wichtiges Verfahren, um kompliziertere Probleme als Störung einfacherer Probleme, deren Lösung man in Form von Eigenzuständen und Eigenwerten bereits kennt, zu behandeln.

[E4] *Reibung* **[3 + 3 + 3 + 3 = 12 Punkte]**

Ein Paket gleitet unter dem Einfluss der Reibungskraft $-\beta v - \gamma v^2$ über eine ebene Fläche ($\beta, \gamma > 0$), die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ sei $v(0) = v_0$.

(a) Machen Sie einen Ansatz wie in [H19] und zeigen Sie, dass sich die Bewegungsgleichung für v in eine lineare umwandeln lässt. Welches $v(t)$ liefert sie? (Auch Nachschlagen in den Präsenzübungen kann hier hilfreich sein.)

(b) Offenbar kommt das Paket erst nach ∞ langer Zeit zum Stillstand, was uns Gelegenheit gibt, den in dieser Zeit zurückgelegten Weg $L = \int \mathrm{d}x = \int \mathrm{d}t\, v$ zu bestimmen. Zeigen Sie, dass sich nach ein paar geeigneten Substitutionen $L = \mu \int_\eta^\infty \mathrm{d}x\, \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}$ ergibt, und gebene Sie die Parametern μ, η an. Dieses Integral finden Sie z.B. in Ihrer Formelsammlung, oder können es mit MATHEMATICA berechnen, womit Sie L als Funktion der ursprünglichen Parameter ausdrücken können.

(c) Alternativ lässt sich der Integrand nach Potenzen von e^{-x} entwickeln und dann termweise integrieren. Ergibt sich das gleiche Resultat?

(d) Eigentlich braucht man nur eine Stammfunktion. Lösen Sie $\dot{x}(t) = v(t)$ zu $x(0) = 0$ mittels Ansatz und schauen Sie, wo ($x_\infty := x(t \to \infty)$) das Paket stehenbleibt. Vergleichen Sie mit (b).

Zwischenergebnis: Das Resultat von (a) lautet $v(t) = \beta v_0 / \big([\beta + \gamma v_0]\mathrm{e}^{\beta t} - \gamma v_0\big)$.

[E5] *Integration* **[1 + 2 + 3 = 6 Punkte]**

Es sei ein Punkt P mit den Koordinaten x, y und z gegeben. Die Abstände von den festen Punkten $(0, 0, 1)$ und $(0, 0, -1)$ zum Punkt P werden mit u und v bezeichnet. Die neuen Variablen ξ, η und ϕ werden folgendermaßen definiert:

$$\xi = \frac{1}{2}(u + v) \quad \text{und} \quad \eta = \frac{1}{2}(u - v),$$

ϕ gibt den Winkel zwischen der Ebene, die die drei Punkte enthält, und der Ebene $y = 0$ an.

(a) Erstellen Sie eine Skizze.

(b) Zeigen Sie, dass sich die Determinante der Jacobi-Matrix $\partial(\xi, \eta, \phi)/\partial(x, y, z)$ zu $(\xi^2 - \eta^2)^{-1}$ ergibt.

(c) Zeigen Sie weiterhin, dass

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 r\, \frac{(u - v)^2}{uv} \exp\left(-\frac{u + v}{2}\right) = \frac{16\pi}{3e}\,.$$

[E6] *Stehende Wellen* **[$1 + 1 + 2 + 2 = 6$ Punkte]**

Zwei Wellen, die auf einer bei $x = 0$ eingespannten Saite in einander entgegengesetzte Richtungen laufen, werden durch die Funktionen

$$\begin{aligned} D_1(x,t) &= A\sin(kx - \omega t) \\ D_2(x,t) &= A\sin(kx + \omega t) \end{aligned}$$

mit $A = 0,2$ m, $k = 2$ m^{-1} und $\omega = 4$ Hz beschrieben. Sie erzeugen eine stehende Welle.

(a) Leiten Sie die Funktion für die stehende Welle mittels trigonometrischer Beziehung aus der Formelsammlung her.
(b) Wie groß ist die maximale Amplitude bei $x = 0,45$ m?
(c) Wo ist das andere Ende eingespannt?
(d) Wie groß ist die maximale Amplitude und wo befindet sie sich?

[E7] *Weltraumfahrstuhl* **[$1 + 1 + 2 + 2 = 6$ Punkte]**

Für einen Weltraumfahrstuhl benötigt man einen "festen Punkt" über der Erdoberfläche, d.h. einen Massenpunkt auf einer Kreisbahn über dem Äquator, dessen Umlaufzeit 24h beträgt. Bestimmen Sie den Radius ρ eines solchen *geostationären* Orbits. *Hinweis*: Geben Sie dazu zunächst die radiale Bewegungsgleichung und den Drehimpuls L, und damit das das effektive Potential $V_{\text{eff}}(r)$ an. Daraus folgt eine Gleichgewichtsbedingung, die Sie nach ρ auflösen können.

HINWEIS: Geben Sie auf Ihren Lösungen Name, Vorname & Matrikelnummer an!