VEKTOREN, SKALAR- UND KREUZPRODUKT

Neben der Addition gibt es zwei weitere sehr wichtige Operationen, das Skalarprodukt zweier Vektoren, und das Kreuzprodukt. Hier lernen wir den Umgang mit diesen beiden Operationen.

[P4] *Mehrfaches Kreuzprodukt*
Schreiben Sie die Komponenten des Kreuzproduktes $\vec{a} \times \vec{b}$ unter Verwendung des Levi-Civita-Symbols. Berechnen Sie damit, wie sich das Produkt $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ schreibt. *Hinweis*: Versuchen Sie, den Ausdruck $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}$ zu vereinfachen. Überlegen Sie auch anschaulich, warum das Produkt $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ immer in der von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Ebene liegt.

[P5] *Index-Notation*
Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke, wobei Sie an die in der Vorlesung eingeführte Einsteinsche Summenkonvention denken, dass also über doppelt auftretende Indizes zu summieren ist:

$\delta_{ij}a_ib_j, \quad \epsilon_{ijk}\delta_{lk}a_lb_j, \quad \epsilon_{ijk}\epsilon_{klj}, \quad \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk}, \quad \epsilon_{ijk}\epsilon_{jnl}\epsilon_{ilm}.$

Was sind die ersten beiden Größen in Vektorschreibweise?

[P6] *Drehmomente*
An einem Körper greifen an den Orten $\vec{r}_i$ die Kräfte $\vec{F}_i$ an, $i = 1, 2, \ldots, N$. Diese Kräfte bewirken das Drehmoment

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{M} \cdot \sum_i \vec{F}_i$ unabhängig von der Wahl des Ursprungs ist.
(b) Welche Bedingung müssen die Kräfte erfüllen, damit das Drehmoment $\vec{M}$ selbst unabhängig von der Wahl des Ursprungs ist?