INTEGRALE

Integrieren ist leider nicht ganz so einfach wie differenzieren, aber eine wichtige Technik, die man als Physiker unbedingt beherrschen muss.

[H30] *Springende Kugel* **[1 + 2 + 2 = 5 Punkte]**

Eine Metallkugel springt auf einer ideal reflektierenden Glasplatte ständig zwischen $z = h$ und $z = 0$ auf und ab. Die Kugel startet bei $t = 0$ auf Höhe h.

(a) Geben Sie $z(t)$ bis zum ersten Auftreffen auf der Glasplatte und die Zeit τ an, die die Kugel von $z = h$ bis $z = 0$ benötigt.
(b) Welche Höhe $\bar{z}$ hat die Kugel im Zeitmittel?
(c) Was ergibt sich für die Standardabweichung Δz ?

[H31] *Die Kunst der Integration* **[1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 Punkte]**

Die folgenden Integrale können mit Techniken wie partielle Integration, Integration durch Substitution usw. ausgerechnet werden. Ihre Rechnung muss alle Zwischenschritte enthalten und mit Erklärungen versehen sein, was genau Sie getan haben.

(a) $J_1 = \displaystyle\int_0^x \mathrm{d}y\, b \frac{2ay + y^2}{(a+y)^2}\,,$

(b) $J_2 = \displaystyle\int_0^c \mathrm{d}x\, \frac{x^2}{a+x}\,,$

(c) $J_3 = \displaystyle\int_1^x \mathrm{d}y\, y^a \ln y\,,$

(d) $J_4 = 2\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{d}y\, y^{2n+1}\, \mathrm{e}^{-y^2}\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,,$

(e) $J_5 = \displaystyle\int \mathrm{d}x\, \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2}$ (Stammfunktion).

Hinweis: Denken Sie bei (d) an das Vorgehen in [P26](b). Hat man keinen Parameter, nach dem man differenzieren könnte, kann man einen einführen, den man am Ende gleich eins setzt.

[C7] *Die Lüge mit der Wurfparabel* **[1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2* = 5 + 2* Punkte]**

Die Bahnkurve eines Steins, der in der Höhe h (damit ist gemeint $x(0) = 0, y(0) = h \ll R$ mit $R =$ Erdradius) horizontal geworfen wird (also $\dot{x}(0) = v_0 \ll R\sqrt{g/h}$, $\dot{y}(0) = 0$), ist keine Wurfparabel, auch im Vakuum nicht. Genau genommen ist die Bahnkurve ein Stück einer Keplerbahn. Wir wollen uns zumindest die erste Korrektur zur Wurfparabel hier klar machen. Diese Aufgabe muss vollständig in MATHEMATICA bearbeitet und gut dokumentiert werden.

(a) Entwickeln Sie das Gravitationspotential als Reihe bis einschließlich zur Ordnung $1/R$. *Hinweis*: Beachten Sie, dass $g := \gamma M/R^2$ ist, substituieren Sie dies und entwickeln erst *danach* die verbleibenden R-Potenzen bis einschließlich $1/R$.
(b) Berechnen Sie aus dieser Näherung des Potentials die Kraft.
(c) Lösen Sie mit dieser Kraft die Newtonsche Bewegungsgleichung. *Hinweis*: Konsequenterweise sind auch in der Lösung $(x(t), y(t))$ alle Terme der Ordnung $1/R^2$ zu vernachlässigen.
(d) Eliminieren Sie t aus der Bahnkurve, um eine Funktion $y(x)$ oder $x(y)$ zu erhalten.
(e) Veranschaulichen Sie durch einen geeigneten Plot die Korrektur zur Parabel, und deuten Sie das Ergebnis.
(f*) Setzen Sie Zahlwerte ein. Der Stein werde mit $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$ geworfen. Wie groß wird die Abweichung konkret im Fall eines Wurfs auf der Erde, und im Fall eines Wurfs auf dem Marsmond Phobos? *Hinweis*: Natürlich muss im zweiten Beispiel für R der mittlere Radius des Marsmondes statt des Erdradius verwendet werden!

HINWEIS: Name, Vorname, und Matrikelnummer angeben! Lösungen bitte zusammenheften!