

INDEXNOTATION

Die Indexnotation ist eine extrem leistungsfähige Methode, um auch komplizierte Berechnungen mit Vektoren, Matrizen, Skalar- und Kreuzprodukten usw. durchzuführen. Sie ist effizient, und hilft schon allein durch ihre Syntax, Fehler zu vermeiden. Für die meisten von Ihnen dürfte sie aber ungewohnt sein. Bitte üben Sie diese so oft und intensiv, wie möglich.

[P7] Drehmomente

Das Drehmoment ist ein Beispiel für eine physikalische Größe, die über ein Kreuzprodukt definiert ist. An einem Körper greifen an den Orten \vec{r}_i die Kräfte \vec{F}_i an, $i = 1, 2, \dots, N$. Diese Kräfte bewirken das Drehmoment

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i.$$

- (a) Zeigen Sie, dass $\vec{M} \cdot \sum_i \vec{F}_i$ unabhängig von der Wahl des Ursprungs ist.
 (b) Welche Bedingung müssen die Kräfte erfüllen, damit das Drehmoment \vec{M} selbst unabhängig von der Wahl des Ursprungs ist?

[P8] Mehrfaches Kreuzprodukt

Schreiben Sie die Komponenten des Kreuzproduktes $\vec{a} \times \vec{b}$ unter Verwendung des Levi-Civita-Symbols. Lösen Sie damit folgende Aufgaben:

- (a) Berechnen Sie, wie sich das Produkt $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ als Linearkombination der Vektoren \vec{b} und \vec{c} schreibt.
Hinweis: Versuchen Sie, den Ausdruck $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}$ zu vereinfachen. Überlegen Sie auch anschaulich, warum das Produkt $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ immer in der von \vec{b} und \vec{c} aufgespannten Ebene liegt.
 (b) Beweisen Sie die Formel $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$ in Index-Notation.

[P9] Index-Gymnastik

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke. Was sind die ersten beiden Größen in Vektorschreibweise?

$$\begin{aligned} \delta_{ij} a_i b_j &= ?, \\ \epsilon_{ijk} \delta_{lk} a_l b_j &= ?, \\ \epsilon_{ijk} \epsilon_{klj} &= ?, \\ \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} &= ?, \\ \epsilon_{ijk} \epsilon_{jnl} \epsilon_{ilm} &= ?. \end{aligned}$$

Hinweis: Es gilt die Einsteinsche Summenkonvention.