KRAFTFELDER UND POTENTIALE

Kraftfelder und Potentiale gehören zu den grundlegenden Konzepten der Physik. Wir studieren einige ihrer Eigenschaften und wie sie beide zusammenhängen.

[P13] *Vom Kraftfeld zum Potential*
Wir betrachten das Kraftfeld $\vec{F}(x,y) \doteq (\alpha x, -\alpha y)$.

(a) Wie sieht das Kraftfeld anschaulich aus? Erstellen Sie eine Skizze mit Pfeilen in der Ebene.
(b) Finden Sie das zugehörige Potential $V(x,y)$, so dass $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ ist.
(c) Wie sieht eine Landschaft aus, deren Höhenfunktion h gerade das in (b) ausgerechnete Potential ist, $h(x,y) = V(x,y)$?

[P14] *Gradient*
Der Gradient einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zeigt immer in Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion.

(a) Wie berechnet man für eine durch $\phi(x,y,z) = \mathrm{const}$ definierte Fläche im dreidimensionalen Raum den Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$ in einem Punkt der Fläche? Welche Bedingung erfüllt eine Bahnkurve, die *innerhalb* der Fläche verläuft?
Bemerkung: der normierte Gradient von ϕ existiert im ganzen Raum, die Einschränkung auf die Fläche erfordert Verwendung der Konstanten.
(b) Ermitteln Sie den Gradienten für die Funktionen

$$x\sin(yz)\,, \qquad \frac{1}{r}\,, \qquad \ln r\,,$$

wobei $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist.

[P15] *Vom Potential zum Kraftfeld*
Bestimmen Sie das Kraftfeld zum Potential $V(\vec{r}) = \frac{m}{2}\big[\,(\vec{\omega}\cdot\vec{r})^2 - \vec{\omega}^2\vec{r}^2\,\big]$ für konstantes $\vec{\omega}$. Verwenden Sie Index-Notation!

Eine allgemein sehr wichtige Formel, die Sie unbedingt nachrechnen und sich merken sollten:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} r &\doteq (\partial_x\,, \partial_y\,, \partial_z)\,\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\
&= \left(\tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,, \tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,, \tfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\
&\doteq \frac{\vec{r}}{r} \\
&= \vec{e}_r\,.
\end{aligned}$$