Prof. Dr. Norbert Dragon
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
Abgabe 27.01.2015 vor der Vorlesung

KEPLERPROBLEM

Wir betrachten das Keplerproblem, eines der Probleme der Physik, das aufgrund von Symmetrien vollständig gelöst werden kann.

[H37] *Keplerproblem außen* **[1 + 1 + 3 + 3 = 8 Punkte]**

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich im Kepler-Potential $V(\vec{x}) = -\alpha/r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(a) Warum sind die Energie E und der Drehimpuls $\vec{L}$ erhalten?

(b) Warum ist die Bahn eben?

(c) Geben Sie die Energie und den Drehimpuls in Kugelkoordinaten an.

(d) Kombinieren Sie die beiden Erhaltungssätze zu einem Energiesatz, in dem nur der Freiheitsgrad $r(t)$ auftritt.

[H38] *Keplerproblem im Innern* **[2 + 3 + 3 + 3 + 2 = 13 Punkte]**

Unter der vereinfachenden Annahme, dass die Massendichte der Erde homogen im Erdinnern ist, ist das Potential im Erdinnern das eines harmonischen Oszillators, und zwar so, dass es stetig differenzierbar beim Erdradius an das Kepler-Potential $-\alpha/r$ anschließt. Wir betrachten daher nun Bewegungen im Potential eines harmonischen Oszillators mit Potential $V(r) = \frac{1}{2}\kappa r^2 + \text{const.}$

(a) Wie groß ist κ für die Erde, wie groß ist also die Kreisfrequenz ω dieses harmonischen Oszillators?

(b) Formulieren Sie das erste Kepler'sche Gesetz für das Potential $V(r) = \frac{1}{2}\kappa r^2$ und vergleichen Sie mit dem echten Kepler-Problem.

(c) Wie verhält es sich mit dem zweiten Kepler'schen Gesetz?

(d) Gibt es auch für das dritte Kepler'sche Gesetz eine Version für das Potential des harmonischen Oszillators?

(e) Wie lange dauert der „Fall" vom Nordpol durch die Erde hindurch zum Südpol und wieder zurück? *Hinweis*: Die spezielle Wahl eines Tunnels längs der Rotationsachse soll es lediglich einfacher machen, da die Bahnkurve dann nicht durch die Rotation der Erde verkompliziert wird. Die Aufgabe lässt sich fast ohne Rechnen lösen.

[H39] *Bahnen* **[3 + 3 + 3 = 9 Punkte]**

Wir betrachten Bahnen im Keplerproblem.

(a) Leiten Sie aus $\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$ und $E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{r}$ mit konstantem m, L, E, α für die Funktion $r(t(\varphi))$ her, dass

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{1}{L} r^2 \sqrt{2m(E - V_{\text{eff}})} \quad \text{mit} \quad V_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$$

gilt, wenn r mit φ zunimmt.

(b) Leiten Sie weiter her, dass $u(\varphi) = \frac{L}{\sqrt{2m\beta}}(\frac{1}{r} - \frac{1}{p})$ mit $\beta = E + \alpha^2 \frac{m}{2L^2}$ und $p = \frac{L^2}{\alpha m}$ die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} = -\sqrt{1 - u^2}$$

erfüllt.

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung aus (b), indem Sie die Umkehrfunktion $\varphi(u)$ als Stammfunktion von $-(1 - u^2)^{-1/2}$ bestimmen. Wie lautet folglich die Lösung $r(\varphi)$, die für $\varphi = 0$ ihren Minimalwert annimmt?

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe (Nummer und Name des Tutors) an! Lösungen unbedingt zusammenheften!