Prof. Dr. Norbert Dragon
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
Abgabe 25.11.2014 vor der Vorlesung

EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN VON MATRIZEN

Treten bei der Beschreibung von physikalischen Systemen Matrizen auf, so kann man sehr viel über das System aussagen, wenn man die Eigenwerte und Eigenvektoren dieser Matrizen kennt.

[H17] *Federkonstanten* **[$6 + 2 = 8$ Punkte]**

Auf ein Teilchen wirken verschiedene Federkräfte, so dass die Gesamtkraft linear in der Auslenkung $\vec{x}$ vom Ursprung ist, $\vec{F} = -\kappa\,\vec{x}$. Hierbei ist, in geeigneten Einheiten, die Federkonstantenmatrix

$$\kappa = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die drei Richtungen $\pm\vec{n}_1$, $\pm\vec{n}_2$ und $\pm\vec{n}_3$, in denen die Kraft in Gegenrichtung zur Auslenkung wirkt, sowie die zu diesen Richtungen gehörenden Federkonstanten. Geben Sie die drei Vektoren auf Länge eins normiert an, $(\vec{n}_i)^2 = 1$. *Hinweis*: Es geht also darum, die normierten Eigenvektoren und Eigenwerte der Matrix κ zu finden.

(b) Was sind die Winkel zwischen diesen Richtungen?

[H18] *Trägheitstensor* **[$2 + 6 = 8$ Punkte]**

Ein starrer Körper rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$. Hier gibt der Vektor mit seiner Richtung die Drehachse, mit seinem Betrag den Betrag der Winkelgeschwindigkeit um diese Achse an. Die Rotationsenergie des starren Körpers ist gegeben als $E = \frac{I_0}{2}(4\omega_1^2 + 4\omega_2^2 + 5\omega_3^2 - 2\omega_1\omega_3 - 2\omega_2\omega_3) =: \frac{1}{2}\omega_i\Theta^{ij}\omega_j$. Hierbei ist I_0 eine Konstante mit der Maßeinheit $\mathrm{kg\,m}^2$.

(a) Geben Sie die *symmetrische* Matrix Θ an, sie wird *Trägheitstensor* genannt.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von Θ. Diese heißen *Trägheitsmomente* und *Hauptträgheitsachsen.*

[H19] *Trägheitstensor II* **[$2 + 4 + 4 + 2 + 2 = 14$ Punkte]**

Die Komponenten Θ^{ij} des Trägheitstensors von n Massepunkten m_α an Orten $\vec{r}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, sind durch

$$\Theta^{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha(\delta^{ij}(\vec{r}_\alpha)^2 - r_\alpha^i r_\alpha^j)$$

definiert. Dabei sind r_α^i die Komponenten des Ortsvektors zum Massepunkt α in einer Orthonormalbasis.

(a) Zeigen Sie, dass Θ symmetrisch ist, $\Theta^{ij} = \Theta^{ji}$.

(b) Berechnen Sie die Komponenten des Trägheitstensors für vier gleiche Massenpunkte, die sich an den Orten $\vec{r}_1 = \frac{r}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_2 = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_3 = \frac{r}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3/2} \\ -\sqrt{3/2} \end{pmatrix}$ und $\vec{r}_4 = \frac{r}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3/2} \\ \sqrt{3/2} \end{pmatrix}$ befinden.

(c) Die Form von Θ legt nahe, dass es eine Drehung um die x-Achse gibt, so dass Θ diagonal wird. Geben Sie die zugehörige Matrix D an, so dass $\Theta' = D\,\Theta\,D^{-1}$ diagonal ist, und berechnen Sie die Bilder $\vec{r}\,'_\alpha = D\,\vec{r}_\alpha$ der Vektoren $\vec{r}_\alpha$. *Hinweis*: Auf die Urbilder der Basisvektoren, $D^{-1}(\vec{e}_i)$, wirkt Θ durch $\Theta(D^{-1}\vec{e}_i) = \lambda(D^{-1}\vec{e}_i)$, sie sind also Eigenvektoren.

(d) Berechnen Sie jetzt den Schwerpunkt

$$\vec{R}\,' = \frac{1}{M}\sum_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \vec{r}\,'_\alpha$$

der Massenanordnung aus (c). Hierbei ist $M = \sum_\alpha m_\alpha$ die Gesamtmasse.

(e) Der Trägheitstensor wurde hier für eine Rotation um den Ursprung berechnet. Laut (d) liegt der Schwerpunkt *nicht* im Ursprung. Schreiben Sie $\Theta' = \Theta'_{\text{Schwerpunkt}} + \Theta'_{\text{relativ}}$ und geben die Trägheitstensoren $\Theta'_{\text{Schwerpunkt}}$ und Θ'_{relativ} an.

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe (Nummer und Name des Tutors) an! Lösungen unbedingt zusammenheften!