
EXPONENTIALFUNKTION, BAHNEN UMD ABLEITUNGEN

Sie erarbeiten sich Fertigkeiten im Ableiten von Bahnen, also vektorwertiger Funktionen eines Parameters wie zum Beispiel der Zeit.

[H22] *Bahn, Geschwindigkeit und Beschleunigung* **[5 + 5 = 10 Punkte]**
Betrachten Sie den Generator δ_3 einer Drehung um die z-Achse aus [H13], gegeben als

$$\delta_3 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} D_{\alpha\vec{e}_z}\Big|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die Exponentialfunktion $\exp$ ist wie in [H13] definiert durch die Reihenentwicklung

$$\exp(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n = 1 + X + \frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{3!} X^3 + \ldots$$

(a) Verwenden Sie die Identität $\exp(\mathrm{i}\,\varphi) = \cos(\varphi) + \mathrm{i}\,\sin(\varphi)$, um Reihenentwicklungen für $\cos(\varphi)$ und $\sin(\varphi)$ anzugeben.

(b) Zeigen Sie, dass $\exp(\alpha\,\delta_3) = D_{\alpha\vec{e}_z}$ ist, dass also die Exponentialfunktion von $\alpha\delta_3$ die Drehmatrix einer Drehung um die z-Achse mit Drehwinkel α ergibt. *Vorgehensweise*: Betrachten Sie zunächst Potenzen $(\delta_3)^k$ für $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Versuchen Sie, ein allgemeines Muster zu erkennen, und fassen Sie entsprechend Terme zusammen. Nun sollten Ihnen die Resultate aus (a) weiter helfen.

[H23] *Bahn, Geschwindigkeit und Beschleunigung* **[4 + 4 + 2 = 10 Punkte]**
Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}$, Beschleunigung $\vec{b} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{r}$ und ihr Kreuzprodukt $\vec{v} \times \vec{b}$ für die Bahnen

(a) $\vec{r}(t) = (R\cos\omega t, R\sin\omega t, vt)$,

(b) $\vec{r}(t) = (X_0\cos(\omega t + \alpha), Y_0\cos(\omega t + \beta), Z_0\cos(\omega t + \gamma))$.

Sind die Bahnkurven eben, ist also die Richtung von $\vec{v} \times \vec{b}$ zeitlich konstant?

[H24] *Zykloide* **[3 + 3 + 4 = 10 Punkte]**
Die Bahnkurve, die ein Punkt auf dem Rand eines rollenden Rades mit Einheitsdurchmesser beschreibt, heißt Zykloide. Sie lässt sich folgendermaßen angeben:

$$f(y) = f(0) - \sqrt{y(1-y)} + \operatorname{arccot}\sqrt{\frac{1-y}{y}} .$$

(a) Bestimmen Sie die Ableitung $g(y) = \frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y}$ der Zykloide.

(b) Parametrisiert man die Bahnkurve über den Drehwinkel an der Radnabe, so findet man $y = y(\varphi) = \frac{1}{2}(1 - \cos\varphi)$. Bestimmen Sie $f(y(\varphi))$ sowie $g(y(\varphi))$. *Hinweis*: $\cos\varphi = \cos(\frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2}) = \ldots$

(c) Setzen Sie $f(0) = 0$ und schreiben Sie den Ortsvektor $\begin{pmatrix} f(y(\varphi)) \\ y(\varphi) \end{pmatrix}$ als Summe aus einem Vektor für die Verschiebung der Radnabe (das Rad hat Radius $1/2$) und einem Vektor für die Drehung um die Radnabe. Den zweiten Vektor können Sie ausdrücken als $\frac{1}{2}D(\varphi)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, wobei $D(\varphi)$ eine Drehmatrix ist.

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe (Nummer und Name des Tutors) an! Lösungen unbedingt zusammenheften!