Präsenzübung XII zur Vorlesung MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK WiSe 2014/15

Prof. Dr. Norbert Dragon

13.-14.01.2015 PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

HARMONISCHER OSZILLATOR

Wir betrachten den harmonischen Oszillator mit Dämpfung und mit harmonischer Anregung.

[P32] *Nur mit Dämpfung*

Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator, beschrieben durch die Kraft $F = -kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$. Hierbei liegt die physikalisch oft gute Annahme zu Grunde, dass die Dämpfung proportional zur Geschwindigkeit der Schwingung ist.

(a) Bringen Sie dies in die Form

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\,.$$

Wie sind demnach die ungedämpfte Kreisfrequenz ω_0 und das Dämpfungsverhältnis ζ definiert?

(b) Lösen Sie diese Differentialgleichung mit Hilfe eines Exponential-Ansatzes: $x(t) = \exp(\lambda t)$. Was für ein Polynom ergibt sich für λ, und welche Nullstellen hat es?

Wir führen nun eine Fallunterscheidung für $\zeta > 1$, $\zeta < 1$ und $\zeta = 1$ durch.

(c) Wie lautet die Schwingungsfrequenz im unterdämpften Fall $\zeta < 1$? Zerlegen Sie dazu λ in Real- und Imaginärteil! Überzeugen Sie sich, dass Sie für $\zeta = 0$ die allgemeine Lösung des ungedämpften Oszillators erhalten.

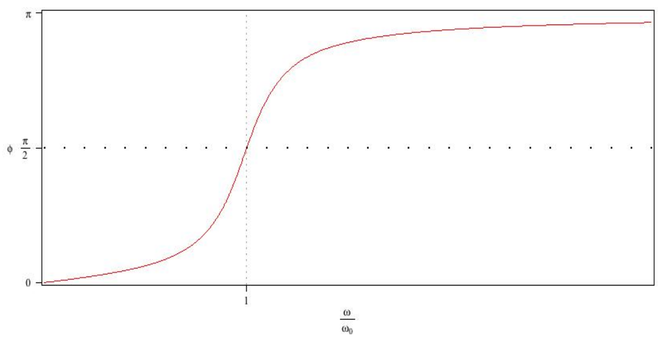
(d) Was passiert im überdämpften Fall $\zeta > 1$, schwingt das System hier?

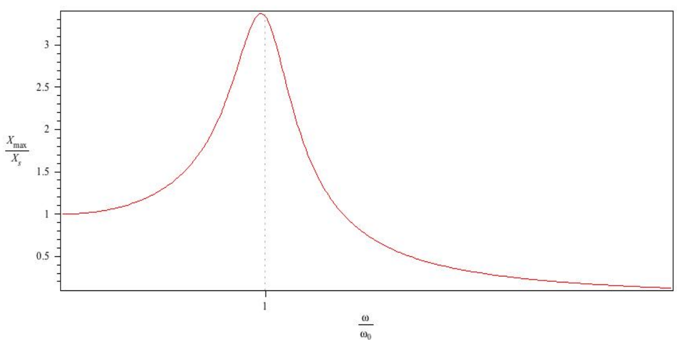
(e) Was fällt Ihnen im Fall kritischer Dämpfung (auch aperiodischer Grenzfall genannt) bei $\zeta = 1$ auf? Prüfen Sie, dass die Entartung durch den weiteren Ansatz $x(t) = t\exp(\lambda t)$ behoben werden kann.

[P33] *Mit harmonischer Anregung*

Zusätzlich zur Dämpfung werde der harmonische Oszillator nun mit einer harmonischen Schwingung der Frequenz ω angetrieben. Wir haben also nun die inhomogene Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = a\cos(\omega t)\,.$$





(a) Zeigen Sie, dass $A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist und berechnen Sie A und B.

(b) Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ergibt sich aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung (aus Aufgabe [P32]) und der in (a) gefundenen speziellen Lösung des inhomogenen Problems. Zeigen Sie, dass sich für $t \to \infty$ jede solche Lösung der in (a) gefundenen Lösung annähert.

(c) Es sei $\zeta < 1$. Bringen Sie die spezielle Lösung aus (a) in die Form $x(t) = X_{\text{max}}\cos(\omega t - \varphi)$ und berechnen Sie die Amplitude X_{max} und die Phasenverschiebung φ. Für welche Anregungskreisfrequenz ω wird X_{max} maximal? Was passiert im Fall $\omega = \omega_0$, dass also der Oszillator mit seiner Eigenfrequenz angetrieben wird? Diskutieren Sie hiermit das Phänomen der *Resonanz.*