Theoretische Physik II
für Lehramtsstudenten
WS 2005/06

Vorlesungen: Michael Flohr
Übungen: Christian Sämann
Übungsleitung: Kirsten Vogeler

Präsenzübung
am 20.12.2005

8. *Nochmals Drehimpulse:* Der Drehimpulsoperator lautet in Kugelkoordinaten

$$\hat{\vec{L}} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \left(\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\theta} - \begin{pmatrix} \cot\theta\cos\varphi \\ \cot\theta\sin\varphi \\ -1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) \cdot \ .$$

   (a) Wie lautet $\hat{\vec{L}}^2$?

   (b) Begründen Sie, warum $[\hat{\vec{L}}^2, p(\hat{r})] = 0$ und $[\hat{\vec{L}}^2, \hat{H}] = 0$ gelten, wobei p ein Polynom in $\hat{r}$ und $\hat{H}$ der Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms sind.

   (c) Die Eigenzustände welcher Operatoren bilden eine vollständige Basis für die quantenmechanischen Zustände des Elektrons im Wasserstoffatom (ohne Spin)? Warum? Gibt es Alternativen?

9. *Stern-Gerlach-Versuch:* Beim Stern-Gerlach-Versuch werden Silberatome durch eine Blende entlang der x-Achse gesendet. Senkrecht zu dem resultierenden dünnen Strahl wird nun entlang der z-Achse ein Magnetfeld angelegt, dessen Ausdehnung in der x-Richtung eng begrenzt ist. Nachdem die Atome das Magnetfeld passiert haben, schlagen sie sich auf einer Platte nieder. Während eine klassische Analyse der Kopplung des magnetischen Moments der Elektronen an das Magnetfeld einen zentrierten Fleck vorhersagt, beobachtet man zwei separate kleinere Flecken. Dies liegt daran, dass die tatsächliche Beschreibung über die Quantenmechanik erfolgen muss.

   (a) Ohne weitere Motivation nehmen wir an, dass wir die Atome im Wesentlichen durch eine Quantenzahl "Spin" beschreiben können. Eine Basis für die quantenmechanischen Zustände der Atome sei durch die Eigenzustände $|\uparrow_z\rangle$ und $|\downarrow_z\rangle$ des Spinoperators $\hat{S}_z$ mit den Eigenwerten $+\frac{\hbar}{2}$ bzw. $-\frac{\hbar}{2}$ gegeben. Wie lauten sämtliche möglichen Skalarprodukte, die Vollständigkeitsrelation und ein allgemeiner Zustand in diesem Raum? Wie lässt sich der Operator $\hat{S}_z$ als Matrix darstellen?

   (b) Der Spinoperator $\hat{S}_z$ ist ein Drehimpulsoperator. Geben Sie möglichst einfache zugehörige Operatoren $\hat{S}_x$ und $\hat{S}_y$ an.

   (c) Wie lauten die Eigenzustände von $\hat{S}_x$ und $\hat{S}_y$ in der oben verwendeten Basis?

   (d) Wie lautet dann der Spinoperator $\hat{S}_{\theta,\varphi}$ und die zugehörigen Eigenzustände?

   (e) Wir entfernen nun die Platte hinter dem oberen Fleck und legen in den resultierenden Strahl ein zweites Magnetfeld, welches mit der z-Achse einen Winkel von θ einschließt. Wie groß ist der Erwartungswert von $\hat{S}_{\theta,\varphi}$? Was bedeutet dies für das Bild auf einer Platte am Ende des Strahlengangs?

   (f) Fixieren wir nun $\theta = \frac{\pi}{2}$ und lassen einen der beiden resultierenden Strahlen abermals passieren. In dessen Strahlengang führen wir nun ein drittes Magnetfeld wiederum entlang der z-Achse ein. Wie groß ist der Erwartungswert des Operators $\hat{S}_z$? Interpretieren Sie das Ergebnis.