Theoretische Physik II
für Lehramtsstudenten
WS 2005/06

Vorlesungen: Michael Flohr
Übungen: Sebastian Uhlmann
Übungsleitung: Kirsten Vogeler

---

2. Übung

(Abgabe: 01.11.2005)

5. *Fourier-Reihen*: Auf der Menge der differenzierbaren Funktionen $f\colon [-L, L] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definieren wir ein Skalarprodukt durch

$$\langle f|g\rangle := \int_{-L}^{L} f^*(x)g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Für $n \in \mathbb{Z}$ und $x \in [-L, L]$ sei $w_n(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/L}$.

(a) Berechnen Sie $\langle w_n|w_m\rangle$! (2)

(b) Die w_n bilden eine Basis auf dem Raum der Funktionen f mit den obigen Eigenschaften. Eine solche Funktion f hat die Basisentwicklung

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n w_n(x)\,, \qquad f_n \in \mathbb{C}\,.$$

Zeigen Sie die Gleichung

$$f_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} w_n^*(x)f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{1}$$

(c) Beweisen Sie die Relation

$$\langle f|f\rangle = 2L\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2\,. \tag{1}$$

6. *Fourier-Integrale*: In dieser Aufgabe soll heuristisch begründet werden, warum ähnliche Formeln für Fourier-Integrale durch einen Grenzübergang aus denen für Fourier-Reihen gewonnen werden können. Dazu setzen wir

$$k_n = n\frac{\pi}{L}\,, \quad \Delta k = \frac{\pi}{L}\,, \quad \frac{L}{\pi}f_n = \frac{\tilde{f}(k_n)}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

Zeigen Sie: Falls man in guter Näherung

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(k)\,\mathrm{d}k \approx \int_{-L}^{L} g(k)\,\mathrm{d}k \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(k_n)\Delta k$$

setzen kann (für großes L), so gehen die Gleichungen in Aufgabe 5. (b) und (c) über in die Entwicklung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$$

einer quadratintegrablen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit Umkehrformel (Fourier-Integralsatz)

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x$$

unter Erhaltung der Norm,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 \mathrm{d}k\,. \qquad (6)$$

7. *Anwendung*: Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Falls der Zusammenhang zwischen f_1 und $\tilde{f}_1$ und zwischen f_2 und $\tilde{f}_2$ durch den Fourier-Integralsatz gegeben ist, ergibt die Polarisationsformel aus Aufgabe 2 für die Skalarprodukte die Beziehung

   $$\int_{-\infty}^{\infty} f_1^*(x) f_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_1^*(k) \tilde{f}_2(k)\,\mathrm{d}k\,. \qquad (2)$$

   (b) Ist $f_2(x) = x f_1(x)$, so gilt $\tilde{f}_2(k) = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial k}\tilde{f}_1(k)$. (1)

   (c) Es gilt

   $$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}^*(k)\,\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial k}\tilde{f}(k)\,\mathrm{d}k\,. \qquad (1)$$

   (d) Analog gilt

   $$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}^*(k)\Big(-\frac{\partial^2}{\partial k^2}\Big)\tilde{f}(k)\,\mathrm{d}k\,. \qquad (1)$$