Theoretische Physik II
für Lehramtsstudenten
WS 2005/06

Vorlesungen: Michael Flohr
Übungen: Christian Sämann
Übungsleitung: Kirsten Vogeler

---

9. Übung

(Abgabe: 20.12.2005)

21. *Rund um das Wasserstoffatom*: Das Problem des Wasserstoffatoms in der Quantenmechanik ist nun vollständig gelöst, d.h. wir kennen sämtliche Energieeigenfunktionen und Energieeigenwerte. In dieser Aufgabe wollen wir einige Konsequenzen ableiten.

    (a) Durch welche Quantenzahlen wird ein Energieeigenzustand des Wasserstoffatoms beschrieben, und wie oft ist jeder Energieeigenwert entartet? Angenommen, wir fügen dem Elektron noch die Quantenzahl *Spin* hinzu, die immer die Werte $\uparrow$ und $\downarrow$ annehmen kann. Wie lautet dann die Formel für die Energieentartungen?

    (b) Wie groß ist eigentlich ein Wasserstoffatom im Grundzustand? Berechnen Sie hierzu den Erwartungswert des Radius sowie den Ort, an dem die Wahrscheinlichkeit, das Elektron im Volumen $\mathrm{d}V = r^2 \mathrm{d}\Omega$ zu finden, sein Maximum annimmt. Die notwendigen Naturkonstanten beschaffen Sie sich bitte selbst. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Bohrschen Radius. Geben Sie einen "pädagogisch wertvollen" Vergleich zum Größenverhältnis Wasserstoffkern-Elektronenhülle an. Der Radius des Wasserstoffkerns beträgt ca. 1 Femtometer.

    (c) Wie ändert sich die Größe eines Atoms, wenn die Kernladungszahl verdoppelt wird? (Wir betrachten also das verbliebene Elektron bei einfach ionisiertem Helium He^+.)

    (d) Wie ändern sich die Energieeigenwerte, wenn man die Bewegung des Elektrons um den Schwerpunkt berücksichtigt (Stichwort: reduzierte Masse)?

    (e) Photonen entstehen beim "Herabfallen" von Elektronen aus höheren auf niedrigere Energiezustände unter Berücksichtigung der Energieerhaltung. Wie groß ist somit die Wellenlänge eines Photons das beim Übergang vom ersten angeregten auf den Grundzustand entsteht? Geben Sie auch ein Beispiel für einen solchen Übergang an, der zu einem sichtbaren Photon führt.

    (f) Berechnen Sie den Erwartungswert des Radius wie unter (b) für die zwei angeregte Zustände mit $n = 2$ und $n = 3$, sowie die Impulserwartungswerte für $n = 1$, $n = 2$ und $n = 3$. (Die Werte für $l = m = 0$ sind ausreichend.) Berechnen Sie hiermit eine klassische Geschwindigkeit der Elektronen im Atom. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den entsprechenden Vorhersagen des Bohrschen Atommodells.

    (g) Berechnen Sie die Ortsunschärfe des Elektrons für $n = 1$, $n = 2$ und $n = 3$ ($l = m = 0$) und setzten Sie diese in Bezug zu ihrem pädagogischen Vergleich von (b).

    2+5+1,5+1,5+3+3+2 P.

Sämtliche Integrale können natürlich mit Mathematica oder Maple berechnet werden. Der größte Aufwand ist hierbei, die richtige Normierung der Wellenfunktionen zu finden und die notwendigen physikalischen Konstanten richtig einzufügen. Vergleichen Sie Ihre Konventionen sicherheitshalber noch mit der Literatur.