Mic$\hbar$ael Flohr
Andre Fischer

Mathematische Vorbereitungen für die Quantenmechanik

Abgabe: 19. Oktober 2007

Die folgenden Übungen haben vorbereitenden Charakter und sollen helfen, den mathematischen Formalismus der Quantenmechanik besser bewältigen zu können. Wenn Ihnen diese Übungen sehr große Schwierigkeiten bereiten, wiederholen Sie bitte das entsprechende Material aus Ihren einführenden Mathematikvorlesungen (Analysis, Lineare Algebra).

1. *Vollständigkeit von normierten Vektorräumen*: Im Vektorraum $C^0([0,1])$ der stetigen Funktionen auf $[0,1]$ mit der sogenannten L^1-Norm $||f||_1 := \int_0^1 |f(t)| \,\mathrm{d}t$ sei eine Folge (f_n) definiert durch

$$f_n(t) := \begin{cases} 0\,, & \text{falls } t \in [0, \frac{1}{2}]\,, \\ n(t-\frac{1}{2})\,, & \text{falls } t \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n}]\,, \\ 1\,, & \text{falls } t \in (\frac{1}{2}+\frac{1}{n}, 1]\,. \end{cases}$$

   Zeigen Sie, daß (f_n) eine Cauchy-Folge ist, aber nicht in $C^0([0,1])$ konvergiert! Damit ist bewiesen, daß $(C^0([0,1]), ||\cdot||)$ kein Banachraum ist. In der Quantenmechanik werden vollständige Vektorräume mit Skalarprodukt (Hilberträume) betrachtet. **[4P]**

2. *Polarisationsformel*: Auf einem Prähilbertraum $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ über $\mathbb{K}$ wird eine Norm definiert durch $||v||^2 := \langle v|v\rangle$. Drücken Sie für $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ das Skalarprodukt $\langle v|w\rangle$ zwischen Vektoren $v, w \in V$ durch diese Norm aus. Zeigen Sie, daß für eine so definierte Norm die Parallelogrammgleichung

$$||v+w||^2 + ||v-w||^2 = 2(||v||^2 + ||w||^2)$$

   gilt. **[4P]**
   [Besonders Interessierte können sich überlegen, warum auch die Umkehrung gilt: Die Norm auf einem normierten $\mathbb{R}$-Vektorraum V erfülle die Parallelogrammgleichung. Zeigen Sie, daß man über die Polarisationsformel ein Skalarprodukt auf V definieren kann.] **[+8P]**

3. *Eigenwerte hermitescher und unitärer Operatoren*: Zeigen Sie, daß hermitesche Operatoren reelle Eigenwerte und unitäre Operatoren Eigenwerte vom Betrag 1 haben. **[3P]**

4. *Berechnung von Skalarprodukten*:

   (a) Im $\mathbb{C}^n$ mit Orthonormalbasis $|\Lambda_i\rangle$, $i=1,\ldots,n$ seien zwei Vektoren $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n \psi_i|\Lambda_i\rangle$, $|\chi\rangle = \sum_{i=1}^n \chi_i|\Lambda_i\rangle$ gegeben. Zeigen Sie, daß das Skalarprodukt der Vektoren gegeben ist durch $\langle\psi|\chi\rangle = \sum_{i=1}^n \psi_i^*\chi_i$! **[1P]**

   (b) Im kontinuierlichen Fall werde ein Vektor $|\psi\rangle$ in der Ortseigenbasis $\{|\Lambda_x\rangle\}$ mit $\langle\Lambda_x|\Lambda_y\rangle = \delta(x-y)$ zerlegt in $|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,\psi(x)|\Lambda_x\rangle$, Analoges gelte für einen Vektor $|\chi\rangle$. Zeigen Sie, daß die Relationen $\psi(y) = \langle\Lambda_y|\psi\rangle$ und $\langle\psi|\chi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\psi^*(x)\chi(x)$ gelten. **[1P]**
   [Bemerkung: Der Raum der quadratintegrablen Funktionen $L^2(\mathbb{R})$ ist der Raum der Funktionen, für die die so definerte Norm $||\psi||^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,|\psi(x)|^2$ endlich ist.]

   (c) Berechnen Sie aus der Forderung $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ für einen Zustand $|\psi\rangle$ mit $\psi(x) = c\,\mathrm{e}^{-x^2/2x_0^2}$ die Normierungskonstante c. Die Impulseigenzustände $|\Gamma_p\rangle$ mit $\hat{p}|\Gamma_p\rangle = p|\Gamma_p\rangle$ haben Wellenfunktionen $\Gamma_p(x) = \langle\Lambda_x|\Gamma_p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\,\mathrm{e}^{\frac{ipx}{\hbar}}$. Berechnen Sie das Skalarprodukt $\langle\Gamma_p|\psi\rangle$! **[2P]**