

Dieses Aufgabenblatt stellt einige relativ einfache Beispiele von relativ relativistischen Aufgaben zur Relativitätstheorie zusammen, denn bekanntlich ist ja alles relativ.

1. *Lorentz-Transformationen*: Beweisen Sie folgende Eigenschaften mit Hilfe der Index-Notation:

(i) Das Pseudo-Skalarprodukt auf dem Minkowskiraum ist lorentzinvariant. [1P]

(ii) Die (inverse) Metrik $\eta^{\mu\nu}$ ist invariant unter Lorentz-Transformationen. [1P]

Betrachten Sie nun reelle Vektoren $\mathbf{x} = (x^0, x^1)$ zusammen mit dem Pseudo-Skalarprodukt $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x^0 y^0 - x^1 y^1$, also eine Raumzeit mit nur einer Raumdimension.

(iii) Bestimmen Sie alle linearen Transformationen $\mathbf{x}' = \Pi \mathbf{x}$, die das Skalarprodukt invariant lassen. Die Π sind also hübsche 2×2 Matrizen. Welche Arten von linearen Abbildungen können Sie identifizieren? [2P]

2. *Der Minkowski-Raum*:

(i) Zeigen Sie anhand von Raumzeitdiagrammen: Wenn zwei Ereignisse durch ein raumartiges [zeitartiges] Intervall getrennt sind, so gibt es ein Bezugssystem, indem diese gleichzeitig [am gleichen Ort] stattfinden. Außerdem gibt es kein Bezugssystem, indem diese am gleichen Ort [gleichzeitig] stattfinden. [2P]

(ii) Geben Sie vier lichtartige Vektoren im Minkowskiraum an, die linear unabhängig sind. Gibt es vier solche Vektoren, so dass diese paarweise orthogonal zueinander sind? [1P]

(iii) Zeigen Sie, dass die einzigen nicht-raumartigen Vektoren orthogonal zu einem gegebenen lichtartigen Vektor notwendigerweise Vielfache desselben sind. [1P]

(iv) Zeigen Sie, dass die Summe zweier Vektoren im Minkowskiraum zeitartig, lichtartig und raumartig sein kann, unabhängig davon, ob die Vektoren selbst zeitartig, lichtartig oder raumartig sind. [1P]

3. *Zerfall eines π^+ -Mesons*: Nach einer Kernreaktion am Ursprung besitzt ein π^+ -Meson die Geschwindigkeit $v = \frac{4}{5}c$. In seinem Ruhesystem hat es eine Lebensdauer von $t'_1 = 2,5 \cdot 10^{-8}$ s, somit ist $ct'_1 = \frac{15}{2}$ m. Wie weit fliegt das Meson und zu welchem Zeitpunkt zerfällt es im Laborsystem?

Hinweis: Skizzieren Sie die Situation. Notieren Sie sich die Werte für $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = (\sqrt{1 - \beta^2})^{-1}$ sowie $\beta\gamma$. Geben Sie die Koordinaten des Mesons zum Zeitpunkt des Zerfalls in seinem Ruhesystem an. Wie sieht die passende Lorentz-Transformation aus? [3P]

4. *Scheinbare Überlichtgeschwindigkeit*: Der Quasar 3C273 (\rightarrow Google) stößt in einer mit der Verbindungslinie Erde-Quasar den Winkel α einschließenden Richtung Materie aus, deren Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ messbar ist. Die Entfernung der Erde zum Quasar sei L , so dass $L\dot{\varphi}$ die Geschwindigkeit quer zur Sichtlinie ergibt, die mit etwa $7c$ gemessen wird. Fertigen sie eine Skizze an und zeigen Sie, dass die Materie tatsächlich mit $|v| < c$ ausströmt. Geben Sie Werte für α und v an, die zur beschriebenen Situation passen würden.

Hinweis: Vergleichen Sie die Lichtlaufzeiten von einem Materiestück zur Erde zum Zeitpunkt t_0 und zu einem späteren Zeitpunkt $t_0 + dt$. [4P]