Mic$\hbar$ael Flohr
Andre Fischer

Wasserstoffatom und Unschärferelation

Abgabe: 23. November 2007

Die folgende Übung leitet die Existenz eines Grundzustandes endlicher Energie für das Wasserstoffatom allein aus der Heisenbergschen Unschärferelation her. Dazu geht man vereinfachend von der Annahme aus, das Elektron kreist um das Proton auf einer Bahn mit Radius r.

1. *Wasserstoffatom vereinfacht*: Wie in der Präsenzübung VI gezeigt, hätte das klassische Wasserstoffatom eine Gesamtenergie $E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = -\frac{e^2}{2r}$, wobei die potentielle Energie $E_{\text{pot}} = -\frac{e^2}{r}$ und die kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m}$ sind. Wenn sich das Elektron auf einer Bahn mit Radius r bewegt, so wollen wir annehmen, dass seine Ortsunschärfe $(\Delta r) \approx r$ von de Größenordnung von r ist. Die zugehörige Impulsunschärfe wäre demnach $(\Delta p) \approx 2\pi\hbar\frac{1}{r}$.

   (i) Setzen Sie nun für p diese Unschärfe ein und bestimmen Sie so die Gesamtenergie des Systems. **[2P]**

   (ii) Fertigen Sie einen Plot von E_{pot}, E_{kin} und E an und zeigen so direkt, dass diese Gesamtenergie E ein Minimum hat. **[1P]**

   (iii) Finden Sie das Minimum dieses Ausdrucks und bestimmen Sie damit den "kleinsten möglichen Abstand" des Elektrons vom Kern zu $r = 4\pi^2\hbar^2\frac{1}{me^2}$. **[2P]**

   (iv) Vergleichen Sie die so gefundene minimale Energie des Wasserstoffatoms mit der exakten Lösung $E = -\frac{1}{2}\frac{e^4 m}{\hbar^2}$. **[1P]**

2. *Harmonischer Oszillator*: Wiederholen Sie die obige Analyse für den harmonischen Oszillator, dessen Gesamtenergie durch $E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$ gegeben ist. Nehmen Sie eine Ortsunschärfe in der Größenordnung der Schwingungsamplitude an, $(\Delta x) \approx x_0$, was zu einer Impulsunschärfe von $(\Delta p) \approx 2\pi\hbar\frac{1}{x_0}$ führt, die Sie wieder für den Impuls einsetzen sollen.

   (i) Fertigen Sie wieder einen Plot von E_{pot}, E_{kin} und E an. **[1P]**

   (ii) Finden Sie wieder das Minimum der Energie und damit die Schwingungsamplitude $x_0 = \left(\frac{4\pi^2\hbar^2}{mk}\right)^{1/4}$. **[3P]**

   (iii) Vergleichen Sie die so gefundene minimale Energie mit der exakten Lösung $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$, wobei die Kreisfrequenz $\omega = 2mx_0^2/\hbar$ ist. **[1P]**