

[P1] Zeigen Sie für eine rationale Funktion  $R(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ , daß das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx R(x) e^{ikx}$$

endlich ist, wenn  $\text{grad}(N(x)) \geq \text{grad}(Z(x)) + 1$  ist und es  $C, \rho > 0$  gibt, so daß  $\frac{1}{|N(x)|} \leq C \forall |x| > \rho$  ist. Betrachten Sie dazu das Umlaufintegral entlang des rechteckigen Integrationsweges mit Eckpunkten  $-L, +L, +L + iL, -L + iL$  im Limes  $L \rightarrow \infty$ . Solche Integrale und Abschätzungen treten sehr oft in der theoretischen Physik auf, insbesondere bei Fragen der Renormierbarkeit in Quantenfeldtheorien.

[P2] *Streuung mit Spin*: Die Streuung eines Neutrons an einem Proton hängt vom Gesamtspin  $S$  des Proton-Neutron-Systems ab. Für niedrige Energien ist der Wirkungsquerschnitt für den Triplett-Zustand ( $S=1$ ) ungefähr  $\sigma^{\text{tr}} = 4\pi|f_3|^2 \approx 2 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ , und für den Singlett-Zustand ( $S=0$ ) ungefähr  $\sigma^{\text{si}} = 4\pi|f_1|^2 \approx 78 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ . Hinweis: Siehe Präsenzübung II.1.

(1) Leiten Sie zur Vorbereitung folgende Identität für  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^t$  und  $\vec{a}, \vec{b}$  beliebige mit  $\vec{\sigma}$  vertauschende Operatoren ab:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

(2) Betrachten Sie nun  $\vec{\sigma}^{(n)} = (\sigma_x \otimes \mathbb{1}, \sigma_y \otimes \mathbb{1}, \sigma_z \otimes \mathbb{1})^t$  und  $\vec{\sigma}^{(p)} = (\mathbb{1} \otimes \sigma_x, \mathbb{1} \otimes \sigma_y, \mathbb{1} \otimes \sigma_z)^t$ . Zeigen Sie, daß gilt:

$$(\vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{\sigma}^{(p)})^2 = 3 - 2(\vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{\sigma}^{(p)}).$$

Folgern Sie damit, daß die Operatoren

$$\Pi_1 = \frac{1}{4}(1 - \vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{\sigma}^{(p)}), \quad \Pi_3 = \frac{1}{4}(3 + \vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{\sigma}^{(p)})$$

zwei zueinander orthogonale Projektoren sind. Machen Sie sich klar, daß  $\Pi_1$  auf den Singlett-Zustand und  $\Pi_3$  auf den Triplett-Zustand projizieren, indem Sie  $\Pi_1$  und  $\Pi_3$  durch  $\vec{S}^2 = \frac{1}{4}(\vec{\sigma}^{(n)} + \vec{\sigma}^{(p)})^2$  ausdrücken.

(3) Folgern Sie, daß der Operator

$$F = \frac{f_1 + 3f_3}{4} + \frac{f_3 - f_1}{4}(\vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{\sigma}^{(p)})$$

Eigenwerte  $f_3$  und  $f_1$  auf dem Triplett- bzw. Singlett-Zustand besitzt.

(4) Um den Wirkungsquerschnitt für beliebig polarsierte Neutronen zu finden, müssen Sie den Erwartungswert von  $F^2$  finden, da

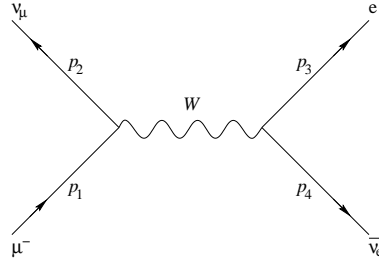
$$\sigma = 4\pi \langle F^2 \rangle$$

ist. Der Spin des einlaufenden Neutrons sei durch

$$\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\vartheta}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} \\ e^{i\frac{\vartheta}{2}} \sin \frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}$$

gegeben. Der Spin des Protons sei  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , d.h. in Richtung der  $z$ -Achse.

[H1] *Phasenraum*: Es soll der Zerfall eines Myons betrachtet werden, der durch folgenden *Feynman-Graphen* symbolisiert wird:



Hierbei sind die  $p_i$  Vierer-Impulse. Zur Erinnerung:  $p^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2 = m^2$ , wobei  $c = 1$  gesetzt ist. Für den Fall eines ruhenden Myons, d.h.  $\vec{p}_1 = 0$ , liefert die Quantenfeldtheorie folgenden Ausdruck für die differentielle Breite:

$$d\Gamma = 128(p_2 \cdot p_3)(p_1 \cdot p_4) \frac{G^2}{2} \frac{1}{2m_\mu} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2p_2^0} \frac{d^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2p_3^0} \frac{d^3\vec{p}_4}{(2\pi)^3 2p_4^0}.$$

In diesem Ausdruck bezeichnet  $G$  die Kopplungskonstante der schwachen Wechselwirkung, und die Vierer-Deltafunktion ergibt sich aus der Verallgemeinerung von Fermi's goldener Regel auf relativistische Mechanik.

(1) Da sich alle Teilchen auf der Massenschale befinden, treten in obiger Formel lediglich Differentiale  $d^3\vec{p}$  auf. Zeigen Sie durch Integration über  $p^0$ , daß

$$\int_{p^0=-\infty}^{p^0=+\infty} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) = \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p^0}$$

ist, und begründen Sie, warum dieses Maß Lorentz-invariant ist. Hierbei ist  $\theta(p)$  die Stufenfunktion, d.h.

$$\theta(p) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } p > 0, \\ 0 & \text{wenn } p \leq 0. \end{cases}$$

(2) Um die weiteren Rechnungen zu vereinfachen, dürfen Sie  $m_e = m_{\bar{\nu}_e} = m_{\nu_\mu} = 0$  setzen. Begründen Sie, warum diese Näherung sinnvoll ist. Desweiteren sei im folgenden  $m_\mu = m$  abgekürzt. Zeigen Sie, daß damit  $(p_1 \cdot p_4) = mp_4^0$  und  $(p_2 \cdot p_3) = p_2^0 p_3^0 (1 - \cos \vartheta)$  ist, wobei  $\vartheta$  der Winkel ist, unter dem das  $\nu_\mu$  relativ zum  $e^-$  ausläuft. Hinweis: Offensichtlich gilt  $p_2 = (p_2^0, p_2^0 \vec{n}_2)$ ,  $p_3 = (p_3^0, p_3^0 \vec{n}_3)$  und  $\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3 = \cos \vartheta$ .

(3) Führen Sie nun die Integration über  $p_4$  sowie über den Raumwinkel von  $p_2$  und den  $\varphi$ -Winkel von  $p_3$  aus, um

$$d\Gamma = \frac{4G^2}{(2\pi)^5} (1 - \cos \vartheta) \underbrace{(4\pi) p_2^2 dp_2}_{d\Omega_2\text{-Integr.}} \underbrace{(2\pi) d\cos \vartheta p_3^2 dp_3}_{d\varphi_3\text{-Integr.}} \times \delta \left( m - p_2 - p_3 - \sqrt{p_2^2 + p_3^2 + 2p_2 p_3 \cos \vartheta} \right)$$

zu erhalten. Der Übersichtlichkeit halber wurde hierbei  $p_2 = |\vec{p}_2| = p_2^0$ ,  $p_3 = |\vec{p}_3| = p_3^0$  gesetzt.

(4) Integrieren Sie nun über  $\cos \vartheta$ . Beachten Sie dabei, daß

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{\left| \frac{\partial}{\partial x} f(x) \Big|_{x=x_i} \right|} \delta(x - x_i)$$

ist, wobei die Summe über die einfachen Nullstellen von  $f(x)$  geht. Das Ergebnis lautet

$$d\Gamma = \frac{8G^2}{(2\pi)^3} \left( 1 - \underbrace{\frac{(m - p_2 - p_3)^2 - p_2^2 - p_3^2}{2p_2 p_3}}_{=\cos \vartheta} \right) \frac{m - p_2 - p_3}{p_2 p_3} p_2^2 dp_2 p_3^2 dp_3 .$$

(5) Im Experiment können die Neutrinos nicht nachgewiesen werden, man sieht nur das Elektron. Untersuchen Sie, welcher Bereich des Phasenraumes  $(p_2, p_3)$  erlaubt ist, indem Sie aus  $-1 \leq \cos \vartheta \leq 1$  Ungleichungen für  $p_2$  und  $p_3$  herleiten. Sie sollten schließlich zu dem Ergebnis kommen, daß separat  $p_2 \leq \frac{m}{2}$  und  $p_3 \leq \frac{m}{2}$  gelten muß, sowie  $p_2 + p_3 \geq \frac{m}{2}$ .

(6) Leiten Sie mit diesen Einschränkungen an die Impulsbeträge das Resultat

$$\Gamma = \frac{8G^2}{(2\pi)^3} \int_0^{m/2} dp_2 \int_{m/2-p_2}^{m/2} dp_3 (m - p_2 - p_3) m (p_2 + p_3 - \frac{m}{2})$$

ab. Begründen Sie die untere Grenze für die innere Integration und führen Sie die innere Integration aus. Wenn Sie schließlich die *kinematische Variable*  $x = \frac{p_2}{m/2}$  einführen (Energie des Elektrons in Einheiten der halben Myon-Masse), sollten Sie als Resultat

$$\Gamma = \frac{G^2 m^5}{2(2\pi)^3} \int_0^1 dx \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)$$

erhalten. Skizzieren Sie den Integralkern, d.h. die differentielle Breite  $\frac{d\Gamma}{dx}$ .

(7) Führen Sie die letzte verbleibende Integration aus um die totale Breite des Myons (und damit seine Lebensdauer) zu erhalten. Suchen Sie bei <http://pdg.lbl.gov/> eine Adresse, wo Sie die Lebensdauer des Myons finden können, und berechnen Sie die Fermi-Konstante  $G$  in  $[\text{GeV}^{-2}]$ .

(10 P.)