[P1] Zum *Drehimpuls*: Die Eigenzustände von $(\vec{L})^2$ und L_z seien mit $|\ell, m\rangle$ bezeichnet.

(1) Geben Sie für $\ell = 2$ die Matrizen L_+ und L_- explizit an. Berechnen Sie daraus L_x und L_y sowie den Kommutator $[L_x, L_y]$.

(2) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle \ell, m|\vec{n} \cdot \vec{L}|\ell, m\rangle$ dafür, daß der Drehimpuls in Richtung des Einheitsvektors $\vec{n}$ zeigt. Berechnen Sie auch die Schwankung $\Big(\Delta(\vec{n} \cdot \vec{L})\Big)^2$.

[P2] Mehr zum *Drehimpuls*: Die *Kugelflächenfunktionen* $Y_{\ell,m}(\varphi, \vartheta)$ bilden für gegebenes ℓ eine Basis von Eigenfunktionen für L_z und $(\vec{L})^2$. Die $Y_{\ell,m}$ sind im allgemeinen kompliziert und nicht sehr anschaulich. Für den Fall $\ell = 2$ soll daher ein Zugang direkterer Art erarbeitet werden:

(1) Betrachten Sie die Drehimpulsalgebra in kartesischer Ortsraumdarstellung, d.h.

$$\begin{aligned} L_x &= -\mathrm{i}(y\partial_z - z\partial_y)\,, \\ L_y &= -\mathrm{i}(z\partial_x - x\partial_z)\,, \\ L_z &= -\mathrm{i}(x\partial_y - y\partial_x)\,, \end{aligned}$$

wobei $\hbar = 1$ gesetzt wurde. Bilden Sie damit L_+ und L_-. Finden Sie ein homogenes Polynom $p_2(x, y, z)$ zweiten Grades, das ein Eigenzustand zu L_z und $(\vec{L})^2$ ist und das von L_+ annihiliert wird, d.h.

$$L_z p_2(x, y, z) = 2p_2(x, y, z)\,, \qquad (\vec{L})^2 p_2(x, y, z) = 6p_2(x, y, z)\,, \qquad L_+ p_2(x, y, z) = 0\,.$$

Hinweis: Offensichtlich braucht dieses Polynom nur von x und y abzuhängen. Es entspricht dem Zustand $|\ell, m\rangle$ mit höchstem Gewicht $m = \ell$.

(2) Berechnen Sie nun für das soeben gefundene Polynom die Polynome $p_{2-k}(x, y, z) = (L_-)^k p_2(x, y)$ für $k = 1, \ldots, 5$, wobei Sie Proportionalitätsfaktoren vernachlässigen dürfen.

(3) Transformieren Sie schließlich die $p_m(x, y, z)$ in Kugelkoordinaten. Nehmen Sie dabei an, daß $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ist. Vergleichen Sie Ihre Resultate mit den expliziten Formeln für die $Y_{\ell,m}(\varphi, \vartheta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} P_{\ell,m}(\cos\vartheta)$. Hierbei sind die assoziierten Legendre-Polynome definiert als

$$P_{\ell,m}(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} P_\ell(x)\,.$$

Die Legendre-Polynome kennen Sie vielleicht noch aus der Elektrodynamik. Sie können explizit durch

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell} (x^2 - 1)^\ell$$

berechnet werden. Zum Beipsiel ist $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

[H1] Unser Lieblingskind, der *harmonische Oszillator*: Erinnern Sie sich an die algebraische Behandlung des harmonischen Oszillators mit einem Paar von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren a^+ und a. Die Vertauschungsrelationen sind wiedereinmal $[a, a^+] = 1$, $[a^+, a^+] = [a, a] = 0$.

(1) Die *kohärenten Zustände* $|\chi_\alpha\rangle$ sind definiert als Eigenzustände zum Vernichtungsoperator a, d.h. $a|\chi_\alpha\rangle = \alpha|\chi_\alpha\rangle$. Ihre Entwicklung nach den Eingenzuständen $|\phi_n\rangle$ des harmonischen Oszillators hat die Form

$$|\chi_\alpha\rangle = C \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\alpha)|\phi_n\rangle \,.$$

Bestimmen Sie die Entwicklungskoeffizienten $f_n(\alpha)$ und den Normierungsfaktor C. Überprüfen Sie, ob die kohärenten Zustände $|\chi_\alpha\rangle$ und $|\chi_\beta\rangle$ für $\alpha \neq \beta$ orthogonal sind, indem Sie $|\langle\chi_\beta|\chi_\alpha\rangle|^2$ berechnen. Hinweis: Die Reihe läßt sich schön zusammenfassen.

(2) Zeigen Sie, daß die Zeitentwicklung des kohärenten Zustandes gegeben ist durch

$$|\chi_\alpha(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega n t}|\phi_n\rangle \,.$$

Hinweis: Der Hamiltonioperator ist $H = \hbar\omega a^+ a$ bis auf die hier vernachlässigte irrelevante Grundzustandsenergie.

(3) Berechnen Sie die *zeitabhängigen* Erwartungswerte des Ortes und des Impulses für den Zustand $|\chi_\alpha(t)\rangle$. Überprüfen Sie das Ehrenfestsche Theorem für den Impulserwartungswert. Welche physikalsche Bedeutung hat der Parameter α? Hinweis: Das Ehrenfestsche Theorem wurde in der Vorlesung besprochen. Es lautet

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\chi_\alpha(t)|P\,\chi_\alpha(t)\rangle = -\left\langle \chi_\alpha(t) \,\middle|\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V(X)\;\chi_\alpha(t) \right\rangle$$

für einen Hamiltonoperator der Form $H = \frac{P^2}{2m} + V(X)$.

(4) Berechnen Sie das Unschärfeprodukt $(\Delta X)(\Delta P)$. Hinweis: Wenn Sie richtig gerechnet haben, sollten Sie das vielleicht überraschende Ergebnis erhalten, daß das Unschärfeprodukt zeitunabhängig ist.

(5) Betrachten Sie den *ausgelenkten* Grundzustand des harmonischen Oszillators, der in Ortsraumdarstellung gegeben ist als

$$\langle x|\phi_0(L)\rangle = \frac{1}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-L}{x_0}\right)^2} \,.$$

Geben Sie seine Entwicklung in der Basis $|\phi_n\rangle$ an und vergleichen Sie dies mit der oben gefundenen Entwicklung des kohärenten Zustandes $|\chi_\alpha\rangle$. Hinweise: Der Zustand $|\phi_0(L)\rangle$ ist offensichtlich der um L translatierte Zustand $|\phi_0\rangle$, d.h. $|\phi_0(L)\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}LP}|\phi_0\rangle$. Drücken Sie P durch a^+ und a aus und verwenden Sie die Baker-Campell-Hausdorff-Formel

$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[A,B]} \,,$$

gültig für beliebige Operatoren A, B, deren Kommutator eine Zahl (mal der Identität) ist. (10 P.)