Rechenmethoden der Physik II, Hausübung 5

Dozent: PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
Übungsleiter: Markus Otto **Abgabe: Dienstag, 20.05.2008**

[H13] *Multipolentwicklung* **(1,5 + 1,5 = 3 Punkte)**

Eine in der Elektrodynamik oftmals benötigte Näherung ist die Taylorentwicklung zweiter Ordnung des inversen Abstandes

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \ , \ \vec{x} \neq \vec{0}$$

um $\vec{y} = \vec{0}$, auch Multipolentwicklung genannt.

(a) Bitte ausführen! Das Teilergebnis $\nabla \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = ?$ kästen wir gleich ein (weil wichtig)!

(b) Das Skalarpotential einer räumlich beschränkten Ladungsdichte, $\rho(\vec{y}) = 0$ für $|\vec{y}| > R$, ist durch

$$\phi(\vec{x}) = \int \mathrm{d}^3 y \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

gegeben. Wie lautet die Multipolentwicklung?
Die Integrale werden uns noch wiederbegegnen... .

[H14] *Differentialgleichungen* **(7 × 1 = 7 Punkte)**

(a) Man gebe die allgemeine Lösung der DGL an:

$$y'(x) = \frac{y}{3y^2 - x} \ .$$

(b) Wie lautet die allgemeine Lösung der DGL

$$yy''(x) - (y'(x))^2 - 1 = 0 \ ?$$

(c) Und hier?

$$xy''(x) - (x+1)y'(x) + y = 2x^2 e^x$$

(d) Was tun wir hier?

$$y' = 2^y$$

(e) Die Population von Ratten verhalte sich gemäß

$$\boxed{\dot{N} = \alpha N - \beta N^2 \ , \ \ N(0) = \frac{\alpha}{\beta}}$$

Wie entwickelt sich die Population $N(t)$ auf lange Sicht hin?

(f) Wie löst sich der getriebene harmonische Oszillator ohne Dämpfung,

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F_0 \cos(\omega t) \ ?$$

(g) Die chemische Reaktion $2NO + O_2 \rightarrow 2NO_2$ wird durch die DGL

$$\dot{x} = k(1 - 2x)^2(1 - x)$$

beschrieben, wobei x die Abnahme der Konzentration von O_2 zum Zeitpunkt t ist. Man berechne mit dem Wissen $x(0) = 0$ und dem Messwert $x(10) = 1/4$ die Reaktionskonstante k. Recht bald taucht ein Integral auf, welches sich per Partialbruchzerlegung lösen lässt. Hoffentlich war es in Analysis schon dran... ansonsten: Orangenes Rep, Seite ...

[H15] *Pfingstknobeleien* **(2 + 3 = 5 ZPunkte)**

(a) Pfingstwanderung. Vier Personen stehen in den Ecken eines Quadrates mit Seitenlänge a. Bei $(a/2, a/2)$ steht der Physik-Student, der der hübschen Tiermedizinstudentin bei $(a/2, -a/2)$ nachläuft. Diese – oh weh – hat nur Augen für den Polizisten bei $(-a/2, -a/2)$, welcher den Rowdy bei $(-a/2, a/2)$ verfolgt, da dieser den Studenten überfallen möchte. Auf welcher Bahnkurve bewegen sich die Personen? Wo treffen sie sich?

(b) Schwarze Schafe. Dereins $(t = 0)$ gab es ebenso viele weiße $(x(0) = x_0)$ wie schwarze Schafe $(y(0) = x_0)$. Sie vermehrten sich gemäß

$$\dot{x} = ax - cx(x+y) \quad , \quad \dot{y} = by - cy(x+y)$$

mit $a > b > 2cx_0$ im Einklang mit der Umwelt (Geburten- minus Sterberate $\sim$ Futter $\sim$ const. - Gesamtanzahl $x + y$) bei geringfügig höherer Sterberate der schwarzen Schafe (Hitzschlag, darum $a > b$). Welche Zukunft $x(t) = ?$ und $y(t) = ?$ hat dieses Ökosystem? Wie sieht die ferne Zukunft aus? Wie war das Verhältnis zu Urzeiten? Ansatz zur Lösung sollten hierbei die neuen Funktionen $x(t) = \exp(at - cu)$ und $y(t) = \exp(bt - cv)$ sein. Aus $\partial_t(u - v) = ?$ folgt die erste Integrationskonstante.