Rechenmethoden der Physik II, Hausübung 7

Dozent: PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
Übungsleiter: Markus Otto **Abgabe: Dienstag, 03.06.2008**

[H19] *Viel Lärm um nichts* **(1,5 + 1,5 = 3 Punkte)**

(a) Kundt'sches Rohr. In einem bei $x = 0$ und $x = L$ verschlossenen Rohr hat sich eine stehende Schallwelle mit maximal möglicher Wellenlänge ausgebildet:

$$n(x,t) = n_0 + n_1 \cos(kx)\cos(\omega t).$$

n ist die Luft-Teilchendichte, $\omega > 0$ und $n_1 \ll n_0$ sind bekannt. $\vec{\jmath}(x,t) = ?$ und $k = ?$

(b) Der Separationsansatz $n = n_0 + f(t)g(r)$ soll in der Wellengleichung $\Box n = 0$ zu einer stehenden Kugelschallwelle der Frequenz ω führen. Tut es dies?

[H20] *Diffusionsgleichung* **(1,5 + 1,5 = 3 Punkte)**

(a) Randwertproblem. In einem Medium herrscht zur Zeit $t = 0$ die Temperatur

$$T(\vec{r}, 0) = 8T_1 \sin^4(kx)$$

Wie sieht das Temperaturfeld $T(\vec{r}, t)$ aus? Einer der Terme wird im Laufe der Zeit besonders rasch kleiner. Nach seiner Vernachlässigung lässt sich T über x im Intervall $(0, 2\pi/k)$ gut skizzieren. Tun!

(b) Separations-Ansatz für kugelsymmetrische Lösungen. Die Diffusionsgleichung wird nun per Separationsansatz $T(r,t) = f(t)g(r)$ gelöst. Welche Lösungen ergeben sich (zwei Fälle)? Skizze von T über r in beiden Fällen!

[H21] *Lösung der Diffusionsgleichung* **(1 + 1,5 + 1,5 = 4 Punkte)**

(a) Man zeige, dass für $t > 0$

$$\Pi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}^{\,3}} e^{-\frac{\vec{x}^2}{4Dt}}$$

eine Lösung der Diffusionsgleichung ist.

(b) Was ergibt der Grenzwert $t \to 0$ bei $\Pi(t, \vec{x})$? Wie folgt hieraus, dass

$$\rho(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}^{\,n}} \int \mathrm{d}^n y \; e^{-\frac{(\vec{x}-\vec{y})^2}{4Dt}} \rho(0, \vec{y})$$

diejenige Lösung $\rho(t, \vec{x})$ der Diffusionsgleichung ist, die zur Anfangszeit $t = 0$ den Wert $\rho(0, \vec{x})$ hatte?

(c) Obige $\rho(t, \vec{x})$-Formel möchte anhand **[P11]**(b) getestet werden. Ergibt sich damit das gleiche? Ob $\int_{-\infty}^{+\infty} du\; e^{-u^2} = \sqrt{\pi}$ hilfreich ist?