Rechenmethoden der Physik II, Präsenzübung 11

Dozent: PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
Übungsleiter: Markus Otto **04.07.2008**

[P21] *Gedämpfter getriebener harmonischer Oszillator mit Fourier*

Wir betrachten den gedämpften getriebenen harmonischen Oszillator

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{1}{m}F(t)$$

mit speziellem $F(t) = F_0 e^{\mathrm{i}\omega' t}$. Die Fourier-Zeit-Trafo ist gegeben durch

$$\mathcal{F}[x(t)] = \tilde{x}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}t\; e^{-\mathrm{i}\omega t} x(t) \quad , \quad \mathcal{F}[\tilde{x}(\omega)] = x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}\omega\; e^{+\mathrm{i}\omega t} \tilde{x}(\omega)$$

(a) Zur Erinnerung: Was war doch gleich $\mathcal{F}\left[\frac{dx}{dt}\right]$? Hiermit sollte es ein Leichtes sein, die Unterwelt-DGL zu berechnen. $\tilde{x}(\omega) = ?$

(b) Nun steigen wir wieder in die Oberwelt auf, $x(t) = ?$ Probe: Löst $x(t)$ wirklich unsere Differentialgleichung?

[P22] *Maxwell in der Unterwelt*

Die Maxwell-Gleichungen sind uns nun schon öfter begegnet. Wir wollen sie jetzt raumzeit-transformieren. Dabei gilt es zu beachten, dass sich bei der Zeittransformation das Vorzeichen in der Exponentialfunktion tauscht:

$$\tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^4 \int \mathrm{d}^3x\; \mathrm{d}t\; e^{-\mathrm{i}(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \vec{E}(\vec{x}, t) \;,\; \vec{E}(\vec{x}, t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^4 \int \mathrm{d}^3k\; \mathrm{d}\omega\; e^{+\mathrm{i}(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \omega)$$

(a) Mit dem Wissen aus der Hausübung und aus **[P21]**(a), dass unter Fourier-Trafo $\partial_x \to \mathrm{i}k$ gilt, folgt auch, dass $\nabla \to \mathrm{i}\vec{k}$. Wie lauten dann die Maxwell-Gleichungen in der Unterwelt?

(b) Spezialfall Elektrostatik. Wie lauten die Unterwelt-Elektrostatik-Gleichungen? Daraus folgt $\tilde{\vec{E}}(\vec{k}) = ?$

(c) Nun der Aufstieg. Man schreibe $\vec{E}(\vec{x})$ in integraler Form. Welcher integrale Ausdruck folgt für das Skalarpotential $\phi(\vec{x})$? Wie folgt hieraus

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \;?$$

Hinweis: $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}u\, \frac{\sin(u)}{u} = \pi$