Rechenmethoden der Physik II, Präsenzübung 6

Dozent: PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
Übungsleiter: Markus Otto **30.05.2008**

[P13] <u>*Delta-Funktion*</u>

Die Delta-Funktion ist keine Funktion im eigentlichen Sinne, sondern eine sogenannte Distribution, die definiert ist gemäß (definierende Eigenschaft)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \delta(x-a) f(x) = f(a).$$

Die Delta-Funktion besitzt die folgenden Eigenschaften:

$$\delta(x-a) = \begin{cases} \infty & , x = a \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \delta(x-a) = 1$$

(dünn, unendlich hoch, Fläche Eins). Skizze!

(a) Jemand hat
$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$$
auf dem Papier stehen und fragt sich, ob dieses eine Delta-Funktion darstellt. Helfen wir!

(b) Man zeige mit Hilfe von Testfunktionen $t(x)$, deren Eigenschaften $t(\pm\infty) = 0$ ist, die folgenden Beziehungen:
$$\begin{aligned} \delta'(x) &= -\frac{\delta(x)}{x} \\ \theta'(x) &= \delta(x)\ ,\quad \theta(x) = \begin{cases} 1\ , & x \geq 0 \\ 0\ , & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(c) Auch $g(x) := C\theta(x)e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$ wird bei $\varepsilon \to 0$ zu $\delta(x)$. $C = ?$

(d) Wie groß ist die Massendichte $\rho(\vec{r})$ eines sehr dünnen Kreisringes mit Radius R und Masse M?

(e) Kraftstoß zur Zeit $t_0 > 0$ mit v_0: ER aufstellen, lösen. $v(t) = ?$

[P14] <u>*Green'sche Funktion*</u>

Die Greensfunktion ermöglicht, zu einer gegebenen, linearen, inhomogenen Differentialgleichung eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden. Die Differentialgleichung habe die Gestalt

$$L(G(t,t_0)) := \sum_{k=0}^{n} a_k \partial_t^k G(t) = \delta(t - t_0).$$

Die Greensfunktion ist die Antwort des betrachteten Systems auf eine δ-artige Störung mit Randbedingung $G(t < 0) = 0$.

(a) Wie lautet bei **[P13]**(e) die Greensfunktion?

(b) Gegeben ist der Operator $L = (\partial_t + \gamma)^2$. Es wird behauptet, dass $G(t) = \theta(t)te^{-\gamma t}$ die zugehörige Greensche Funktion ist. Prüfen!

(c) Wie leitet sich die Greensche Funktion in Aufgabe (b) her?