VII. Integral-Transformationen

VII.1. Fourier-Transformation

Konzept: Periodische Fktn. mit Periodenlänge L:

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k \, e^{\frac{2\pi i x k}{L}}$$

mit Koeffizienten

$$f_k = \frac{1}{L}\int_{x_0}^{x_0+L} f(x)\, e^{-\frac{2\pi i x k}{L}}\, dx$$

H_L = Vektorraum der period. Fktn. mit Periodenlänge L,

H_L hat ein VONS: $\Big\{ \underbrace{e^{2\pi i x k/L}}_{\equiv |k\rangle} : k \in \mathbb{Z} \Big\}$

Wiederh. $\langle f|g\rangle \equiv \int_{x_0}^{x_0+L} f^*(x) g(x)\, dx$

Denn: $\langle k|m\rangle = \frac{1}{L}\int_{x_0}^{x_0+L} e^{-2\pi i k x/L}\, e^{2\pi i m x/L}\, dx$

$$= \frac{1}{L}\int_{x_0}^{x_0+L} e^{2\pi i (m-k)x/L}\, dx$$

$m \neq k$

$$= \frac{1}{L}\,\frac{L}{2\pi i (m-k)}\, e^{2\pi i (m-k)x/L}\Big|_{x_0}^{x_0+L}$$

$$= \frac{1}{2\pi i (m-k)}\Big[e^{2\pi i (m-k)x_0/L + 2\pi i (m-k)} - e^{2\pi i (m-k)x_0/L}\Big]$$

$$= \frac{1}{2\pi i (m-k)}\Big[e^{2\pi i (m-k)x_0/L}\big(\underbrace{\underbrace{e^{2\pi i (m-k)}}_{=1} - 1}_{=0}\big)\Big]$$

$$= 0$$

Bzw.: $m = k$

$$= \frac{1}{L}\int_{x_0}^{x_0+L} dx = \frac{1}{L} L = 1 \; ✓$$

$\Rightarrow \langle k|m\rangle = \delta_{km}$

$f_k = \langle k|f(x)\rangle$ sind die Koeffizienten des Vektors $f(x)$ ausgedrückt als Lin.-komb. in den $|k\rangle$.

$$|f(x)\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k |k\rangle$$

Übergang zur Fouriertransformation

beliebige, nicht periodische Fktn:

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\, e^{2\pi i t k/L} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k\, e^{i\omega_k t}, \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{L}$$

Nun lassen wir $L\to\infty$ gehen. $\Rightarrow \Delta\omega = \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{2\pi}{L} \to 0$

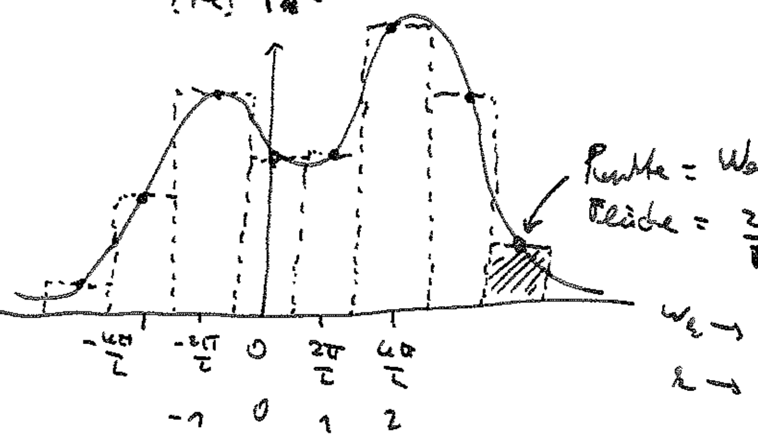
Das Spektrum der erlaubten Frequenzen ω wird kontinuierlich.

Es war $$f_k = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(t)\, e^{-2\pi i k t/L}\, dt = \frac{\Delta\omega}{2\pi}\int_{-L/2}^{L/2} f(t)\, e^{-i\omega_k t}\, dt$$

$$\Rightarrow f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\Delta\omega}{2\pi}\int_{-L/2}^{L/2} f(u)\, e^{-i\omega_k u}\, du\, e^{i\omega_k t}$$

Noch sind die ω_k diskrete Werte für diskrete k: $\omega_k = \frac{2\pi k}{L}$.

$$\boxed{\mathrm{Re}}\; f_k\, e^{i\omega_k t} \longleftrightarrow \tilde{f}(\omega)\, e^{i\omega t}$$



Punkte = Werte $f_k\, e^{i\omega_k t} \equiv \tilde{f}(\omega_k)\, e^{i\omega_k t}$

Fläche = $\frac{2\pi}{L} f_k\, e^{i\omega_k t} \equiv \frac{2\pi}{L}\tilde{f}(\omega_k)\, e^{i\omega_k t}$

$\Leftrightarrow$ Limes $L\to\infty$ macht aus der Summe gerade die Riemann-Darst. einer Integration:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\Delta\omega}{2\pi}\tilde{f}(\omega_k)\, e^{i\omega_k t} \xrightarrow[\Delta\omega\to 0]{} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

Es ist $$\tilde{f}(\omega_k) = \int_{-L/2}^{L/2} f(t')\, e^{-i\omega_k t'}\, dt' = \int_{-L/2}^{L/2} f(u)\, e^{-i\omega_k u}\, du$$

und so $$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} du\, f(u)\, e^{-i\omega u}.$$

(Fourier-Umkehrungs-Theorem)

Def!

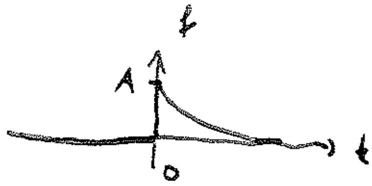
$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$ Fourier-Transf. von $f(t)$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$ Umrechnung der Fourier-Transf., Inverse Fourier-Transf.

Vorfaktoren kann man bel. wählen, A, B, solange $AB = \frac{1}{2\pi}$ gilt. Hier: symmetr. Def.

Bsp:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A e^{-\lambda t} & t \geq 0, \quad (\lambda > 0) \end{cases}$$



$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} (0)\, e^{-i\omega t}\, dt + \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda t} e^{-i\omega t}\, dt$$

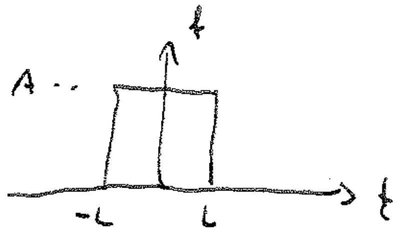
$$= 0 + \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{e^{-(\lambda + i\omega)t}}{\lambda + i\omega} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\lambda + i\omega}$$

Bem! f reell, aber $\tilde{f}$ ist komplex!

Bsp!

$$f(t) = \begin{cases} 0 & |t| > L \\ A & |t| \leq L \end{cases}$$

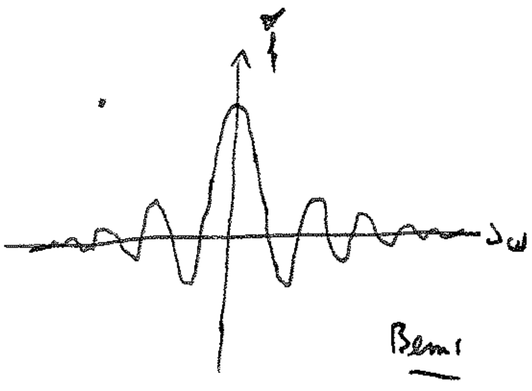


$$\tilde{f}(\omega) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^{L} e^{-i\omega t}\, dt = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} \right]_{-L}^{L}$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega L} + \frac{1}{i\omega} e^{i\omega L} \right)$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{\omega} \left[\frac{e^{i\omega L} - e^{-i\omega L}}{2i} \right]$$

$$= \frac{2A}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\omega L)}{\omega}$$

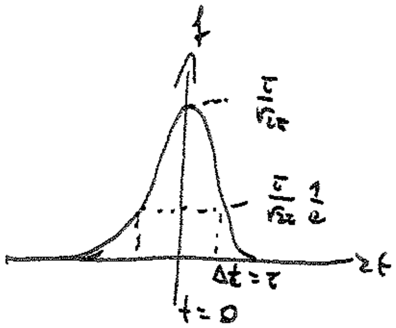


Bem: $\lim_{L \to \infty} \left(\frac{\sin \omega L}{\omega \pi} \right) = \delta(\omega)$

VII.2. Das Unschärfeprinzip

Wir betrachten die Gauß-Glocke:

$$f(t) = \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/2\tau^2} \qquad -\infty < t < \infty$$



$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/2\tau^2}\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \frac{1}{\tau 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\tau^2}\left[t^2 + 2\tau^2 i\omega t + (\tau^2 i\omega)^2 - (\tau^2 i\omega)^2\right]\right) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi\tau}\, e^{-\frac{(\tau^2 i\omega)^2}{2\tau^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-(t+i\tau^2\omega)^2/2\tau^2\right) dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\tau^2\omega^2/2}\ \underbrace{\frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+i\tau^2\omega)^2/2\tau^2}\, dt}_{=1}$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\left(-\frac{\tau^2\omega^2}{2}\right)}$$

<u>Also:</u> $f(t)$ Gauss-Verteilung, zentriert um 0, Breite $\tau = \Delta t$

$\tilde{f}(\omega)$ Gauss-Verteilung, zentriert um 0, Breite $\frac{1}{\tau} = \Delta\omega$

Gauss-Vert. ist die einzige Fkt., deren Fourier-Transf. wieder diese Fkt. ergibt.

<u>Beachte</u> $$\boxed{\Delta\omega\,\Delta t = \frac{1}{\tau}\tau = 1}$$

Kurze Pulse (in der Zeit) enthalten viele Frequenzen,
Lange Pulse haben eine schärfer definierte Frequenz.

<u>Man kann zeigen</u>: wenn man andere Verteilungen betrachtet (deren Mittel-/Erwartungswerte o.B.d.A. auf 0 zentriert sind), so kann man für diese Verteilungen ebenfalls Varianzen/Breiten definieren: Es gilt dann allgemein $(\Delta_f t)(\Delta_{\tilde{f}}\,\omega) \geq 1$, "=" nur für Gauss-Verteilung.

Erwartungswert $\langle t \rangle_f = \int_{-\infty}^{\infty} t\, f(t)\, dt$

bzgl. Verteilung f

Varianz: $(\Delta t)^2 = \langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2$

In der Physik: $f(t)$ oft komplex $\rightsquigarrow |f(t)|^2$

$$\langle t \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} t\, |f(t)|^2\, dt$$

$$(\Delta t)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \langle t \rangle)^2 |f(t)|^2\, dt = \langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2$$

Erwartungswert der Gauss-Vert.

$$\langle t \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot \left(\frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/2\tau^2} \right)^2 dt$$

$$= \frac{1}{\tau^2 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t\, e^{-t^2/\tau^2}\, dt$$

$$= \frac{1}{\tau^2 2\pi} \left(-\frac{\tau^2}{2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} e^{-t^2/\tau^2}\, dt$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\, e^{-t^2/\tau^2} \Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$= 0 \checkmark$$

Standardabweichung / Varianz:

$$(\Delta t)^2 \overset{\langle t \rangle = 0}{=} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \left(\frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/2\tau^2} \right)^2 dt$$

$$= \frac{1}{\tau^2 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{t^2 e^{-t^2/\tau^2}}_{= -\frac{\tau^2}{2}\, t \cdot \frac{d}{dt} e^{-t^2/\tau^2}}\, dt$$

$$= \frac{1}{\tau^2 2\pi} \left(-\frac{\tau^2}{2} \right) \left[\underbrace{t\, e^{-t^2/\tau^2} \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/\tau^2}\, dt \right]$$

$$\cancel{= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/\tau^2} dt = \frac{1}{4\pi\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{4\pi\tau}\sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(2\sqrt{2}\tau)}} \quad \cancel{= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{4\tau}}$$

$$= \frac{\tau^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/2\tau^2} \right)^2 dt = \frac{\tau^2}{2} \langle 1 \rangle. \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{\tau}{\sqrt{2}}}$$

VII.3 Eigenschaften der FT

① Bzhg. zur δ-Distribution:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, f(t') e^{-i\omega t'}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, f(t') \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} d\omega \right]}_{\delta(t-t')}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} d\omega}$$

Ab jetzt: $\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i\omega t} f(t) \equiv \mathcal{F}[f(t)]$

② Ableitung: $\mathcal{F}[f'(t)] = i\omega \tilde{f}(\omega)$

$\mathcal{F}[f''(t)] = (i\omega)^2 \tilde{f}(\omega) = -\omega^2 \tilde{f}(\omega)$

usw.

Denn: $\mathcal{F}[f'(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t} dt$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(t) e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (-i\omega) e^{-i\omega t} dt \right]$$

$$= 0 + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$f(\pm\infty) = 0$

$$= i\omega\, \mathcal{F}[f(t)] = i\omega \tilde{f}(\omega) \quad ✓$$

③ Integration: $\mathcal{F}\left[\int^{t} f(t') dt' \right] = \frac{1}{i\omega} \tilde{f}(\omega) + \underbrace{2\pi \delta(\omega) \cdot \text{const}}$

Fouriertransf. der Integrationskonstanten

Denn $\mathcal{F}[\text{const}] = \sqrt{2\pi}\, \delta(\omega)$

④ Dilatieren: $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{a} \tilde{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$

⑤ Translation: $\mathcal{F}[f(t+a)] = e^{ia\omega} \tilde{f}(\omega)$

⑥ Exponentielle Multiplikation: $\mathcal{F}[e^{\alpha t} f(t)] = \tilde{f}(\omega + i\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

VII.4. Das Faltungstheorem

Wir wollen $f(x)$ messen, oder $f(t)$, oder ..

Leider verschmiert unser Messapparat ~~Meßpr~~ Messwerte mit einer Verteilung $g(x)$.

$g(x)$ gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Messwert $x=0$ nicht angezeigt wird, sondern stattdessen $x=x'$: $g(x')dx'$.

Mit einem realistischen Messapparat beobachtet man nicht $f(x)$, sondern $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') g(x-x') dx'$.

$$h \equiv f * g \quad \text{Faltung von } f \text{ mit } g.$$

$$f*g = g*f \quad \text{kommutativ.}$$

h ist im allg. breiter und glatter als f.

$h = f$ für $g = \delta$ (ideale Messapparatur).

Was ist $\tilde{h}(k)$?

$$F[h(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x') g(x-x') dx' \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \left(\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{g(x-x')}_{u} e^{-ikx} dx \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-ik(u+x')} du \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ikx'} dx' \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-iku} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sqrt{2\pi}\, \tilde{f}(k) \right) \left(\sqrt{2\pi}\, \tilde{g}(k) \right)$$

$$= \sqrt{2\pi}\, \tilde{f}(k) \tilde{g}(k)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} F[f*g] &= \sqrt{2\pi}\, F[f]\, F[g] \\ F[fg] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F[f] * F[g] \end{aligned}}$$