VII.4. Das Faltungstheorem

Wir wollen $f(x)$ messen, oder $f(t)$, oder ..

Leider verschmiert unser Messapparat ~~Meßw~~ Messwerte mit einer Verteilung $g(x)$.

$g(x)$ gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Messwert $x=0$ nicht angezeigt wird, sondern stattdessen $x=x'$: $g(x')dx'$.

Mit so einem realistischen Messapparat beobachtet man nicht $f(x)$, sondern $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\, g(x-x')\, dx'$.

$$h \equiv f*g \qquad \text{Faltung von } f \text{ mit } g.$$

$$f*g = g*f \qquad \text{kommutativ.}$$

h ist im allg. breiter und glatter als f.

$h = f$ für $g = \delta$ (ideale Messapparatur).

Was ist $\tilde{h}(k)$?

$$F[h(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\, g(x-x')\, dx' \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x') \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\underbrace{x-x'}_{u})\, e^{-ikx}\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x') \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, e^{-ik(u+x')}\, du \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\, e^{-ikx'}\, dx' \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, e^{-iku}\, du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sqrt{2\pi}\, \tilde{f}(k) \right) \left(\sqrt{2\pi}\, \tilde{g}(k) \right)$$

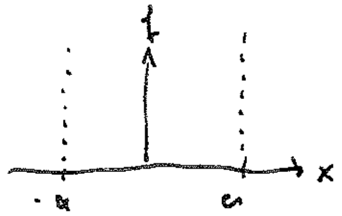
$$= \sqrt{2\pi}\, \tilde{f}(k)\, \tilde{g}(k)$$

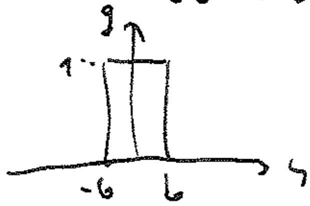
$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} F[f*g] &= \sqrt{2\pi}\, F[f]\, F[g] \\ F[fg] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, F[f] * F[g] \end{aligned}}$$

Beispiele: Faltung /

Konvolution von $f(x) = \delta(x+a) + \delta(x-a)$

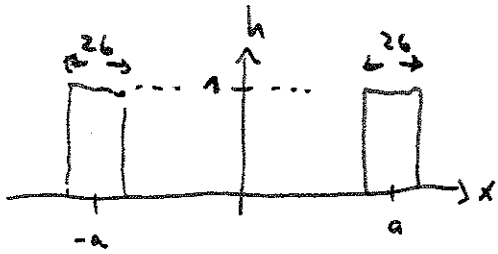
mit $g(q) = \begin{cases} 1, & |q| \le b \\ 0 & |q| > b \end{cases}$





$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\, g(x-x')\, dx' = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\delta(x'+a) + \delta(x'-a)\right] g(x-x')\, dx'$$

$$= g(x+a) + g(x-a)$$



Fourier-Transf. von $h(x)$:

Wir brauchen $\tilde{f}(q)$ und $\tilde{g}(q)$:

$$\tilde{f}(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\, e^{-iqx} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x+a)\, e^{-iqx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-iqa} + e^{iqa}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cos(qa)$$

$$\tilde{g}(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^{b} e^{-iqx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-iqx}}{-iq} \right]_{-b}^{b}$$

$$= \frac{-1}{iq\sqrt{2\pi}} \left(e^{-iqb} - e^{iqb}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(qb)}{q}$$

$\Rightarrow \tilde{h}(q) = \sqrt{2\pi}\, \tilde{f}(q)\, \tilde{g}(q)$ nach Faltungstheorem

$$= \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\cos(qa)\sin(qb)}{q}$$ ✓

◎ Dekonvolution:

Sei die Auflösungsfkt $g(y)$ eines Messapparates bekannt (kann oft durch "Eichmessung" bestimmt werden). Wie kann aus Mess-Signal $h(x)$ die experimentelle Größe $f(x)$ extrahiert werden? Umkehrung der Faltung/Konvolution mit Hilfe der Fourier-Transf.:

$$\tilde{h}(k) = \sqrt{2\pi}\, \tilde{f}(k)\, \tilde{g}(k) \qquad \text{Faltungstheorem:}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\tilde{h}(k)}{\tilde{g}(k)} \qquad \text{Inverse Fourier-Transf.:}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\tilde{h}(k)}{\tilde{g}(k)}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{h}(k)}{\tilde{g}(k)} e^{ikx}\, dk$$

<u>Nachteil:</u> Es werden <u>drei</u> Integrationen über einen unendlichen Bereich benötigt (für $\tilde{h}, \tilde{g}$ und dann für f). Daten liegen aber i.a. nur für endliche Bereiche vor, sie sind zusätzlich mit weiteren experimentellen und statistischen Fehlern behaftet.

VII.5. Korrelations-Funktionen & Parseval's Theorem

Wir definieren die <u>Kreuz-Korrelation</u> zweier Fktn f und g als

$$C(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\, g(x+z)\, dx = f \otimes g$$

(also ist $C(0) = \langle f | g \rangle$, $C(z) = \langle f | T_z | g \rangle$ mit T_z Translationsoperator $\exp\left(z \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \frac{\partial^n}{\partial x^n}$)

Die Kreuz-Korrelation ist ein quantitatives Maß dafür, wie ähnlich die Fktn. f, g sind, falls g bzgl. f um z verschoben wird. Assoziativ, distributiv, aber <u>nicht</u> kommutativ:

$$(f \otimes g)(z) = [g \otimes f]^*(-z)$$

Man kann aber, ähnlich zum Faltungstheorem, eine Beziehung zur Fourier-Transf. von $C(\tau)$ herleiten.

$$\tilde{C}(k) = \sqrt{2\pi}\; \tilde{f}(k)^* \tilde{g}(k)$$

Denn:

$$\tilde{C}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{-ik\tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\, g(x+\tau)\, dx \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f^*(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x+\tau)\, e^{-ik\tau}\, d\tau \right]$$

$u = x+\tau$ Substitution

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f^*(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, e^{-ik(u-x)}\, du \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\, e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, e^{-iku}\, du$$

$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx} \right)^*$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sqrt{2\pi}\, (\tilde{f}(k))^* \right) \left(\sqrt{2\pi}\; \tilde{g}(k) \right)$$

$$= \sqrt{2\pi}\; (\tilde{f}(k))^*\, \tilde{g}(k) \quad \checkmark$$

Wiener-Kinchin-Theorem

Umkehrung:

$$\mathcal{F}[f^*(x)\, g(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \tilde{f} \otimes \tilde{g}$$

Auto-Korrelation: $g = f$

$$A(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\, f(x+\tau)\, dx$$

Wiener-Kinchin-Theorem

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(k)\, e^{ik\tau}\, dk$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi}\, (\tilde{f}(k))^*\, \tilde{f}(k)\, e^{ik\tau}\, dk$$

$$= \mathcal{F}^{-1}\left[|\tilde{f}(k)|^2 \right] \sqrt{2\pi}$$

Man nennt $|\tilde{f}(k)|$ das Energie-Spektrum von f.

Parseval's Theorem:

Mit Kreuz-Korrelation

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\, g(x+\tau)\, dx \underset{\uparrow}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{f}(k))^* \tilde{g}(k)\, e^{ik\tau}\, dk$$

Wiener-Kinchin Theorem

gilt speziell für $\tau = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\, g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)^* \tilde{g}(k)\, dk \qquad \text{Parseval's Theorem}$$

(Multiplikations-Satz)

und insbesondere für $g = f$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk$$

f = physikalische Amplitude $\Rightarrow \int |f|^2 = \langle f | f \rangle$ = Gesamt-Intensität, die im phys. Prozess involviert ist.

Bsp: Ein gedämpfter harmon. Oszillator hat, als Fkt. der Zeit, die ~~maximale~~ Auslenkung

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dämpfung}}}{e^{-t/\tau}} \sin \omega_0 t & t \geq 0 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}\right)$$

Wir haben also

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot e^{-i\omega t}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t/\tau}\, \overbrace{\sin(\omega_0 t)}\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= 0 + \frac{1}{2i} \int_0^\infty \left(e^{-it(\omega - \omega_0 - i/\tau)} - e^{-it(\omega + \omega_0 - i/\tau)} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\omega + \omega_0 - \frac{i}{\tau}} - \frac{1}{\omega - \omega_0 - \frac{i}{\tau}} \right]$$

$|\tilde{f}(\omega)|^2$ = Energie, die pro Einheits-Frequenzintervall abgestrahlt wird,

$|f(t)|^2$ = Die im Oszillator gespeicherte Energie.

$\Rightarrow$ Parseval's Theorem = Aussage der Energie-Erhaltung.

$$|f\rangle = \int dx\, |x\rangle \overbrace{\langle x|f\rangle}^{f(x)} \quad \text{in Ortsbasis}$$

$$= \int dk\, |k\rangle \underbrace{\langle k|f\rangle}_{\tilde{f}(k)} \quad \text{in Impulsbasis.}$$

Parseval's Theorem ist die "Trivialität",
dass Skalarprodukte und Norme unter Basiswechsel invariant sind.

$$\langle f|f\rangle = \left[\int dy\, |y\rangle\langle y|f\rangle\right]^{+} \left[\int dx\, |x\rangle\langle x|f\rangle\right]$$

$$= \int dy \int dx\, \langle f|y\rangle \underbrace{\langle y|x\rangle}_{\delta(x-y)} \langle x|f\rangle$$

$$= \int \langle f|y\rangle\langle y|f\rangle\, dy$$

$$= \int |f(y)|^2\, dy$$

VII. 6. Fourier-Transf. in höheren Dimensionen

Fourier-Transf. läßt sich auf natürl. Weise auf mehr als eine Dim. erweitern:

$f(x,y,z) \rightsquigarrow$

$$\tilde{f}(k_x,k_y,k_z) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \iiint f(x,y,z)\, e^{-ik_x x}\, e^{-ik_y y}\, e^{-ik_z z}\, dx\,dy\,dz$$

analog

$$f(x,y,z) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \iiint \tilde{f}(k_x,k_y,k_z)\, e^{ik_x x}\, e^{ik_y y}\, e^{ik_z z}\, dk_x\,dk_y\,dk_z$$

kompakter geschrieben:

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\vec{r})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, d^3r$$

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \tilde{f}(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, d^3k$$

Insbesondere

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, d^3k$$

- Sphärische Symmetrie: $f(\vec{r}) = f(r)$ in 3 Dimensionen.

Erinnerung: $d^3r = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi = r^2 dr\, d(\cos\theta)\, d\phi$

$\vec{k}\cdot\vec{r} = kr\cos\theta$

$|\vec{k}| = k, \quad |\vec{r}| = r$ wie üblich

$$\Rightarrow \tilde{f}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\vec{r})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, d^3r$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\; f(r)\, r^2 \sin\theta\, e^{-ikr\cos\theta}$$

$$= \frac{2\pi}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty dr\, r^2 f(r) \int_0^\pi d\theta \sin\theta\, e^{-ikr\cos\theta}$$

Mit $\frac{d}{d\theta}\left(e^{-ikr\cos\theta}\right) = ikr\sin\theta\, e^{-ikr\cos\theta}$

$$\Rightarrow \int_0^\pi d\theta \sin\theta\, e^{-ikr\cos\theta} = \frac{1}{ikr} e^{-ikr\cos\theta}\Big|_0^\pi$$

Also: $$\tilde{f}(k) = \frac{2\pi}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty dr\, r^2 f(r) \left[\frac{e^{-ikr\cos\theta}}{ikr}\right]_0^\pi$$

$$= \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty r^2 f(r) \left(\frac{\sin(kr)}{kr}\right) dr$$

$$\left(= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{k^2} \int_0^\infty f(r)(kr)\sin(kr)\, dr \right)$$

Bsp: ∘ Ebene Wellen in Maxwell-Theorie

$$f(\vec{r},t) = A_\pm e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} \pm \omega t)}$$ mit $\omega = c|\vec{k}|$ bzw. $\frac{\omega}{|\vec{k}|} = c$

Allgemeinste Überlagerung

$$f(\vec{r},t) = \sum_{n,\pm} A_{n,\pm} e^{i(\vec{k}_n\cdot\vec{r} \pm \omega t)} \rightsquigarrow \sum_\pm \int d^3k\, A_\pm(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} \pm \omega t)}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_\pm \int (2\pi)^{3/2} A_\pm(\vec{k}) e^{\pm i\omega t} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3k$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_\pm \int \tilde{f}_\pm(\vec{k},t)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3k$$ mit

$$\tilde{f}_\pm(k,t) = (2\pi)^{3/2} A_\pm(\vec{k})\, e^{\pm i|\vec{k}|ct}$$

Setze $k_0 = \pm\omega = \pm|\vec{k}|$, $r_0 = ct$:

$$f(\vec{r}, r_0) = \cancel{\sum_\pm} \int d^3k\, A_\pm(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} \pm k_0 r_0)}$$

k_0 kann nun auch negativ sein

$$= \int d^4k\, A(\vec{k}, k_0)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} + k_0 r_0)}\, \delta(\vec{k}^2 - k_0^2)$$

1-dim δ-Distribution, hat 2 Nullstelle

$$f(\vec r, t_0) = \frac{1}{(2\pi)^{4/2}} \int d^4k \, (2\pi)^2 A(\vec k, k_0)\, \delta(\vec k^2 - k_0^2)\, e^{i(\vec k\cdot\vec r - k_0 t_0)}$$

oder
$$f(x^\mu) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k \, (2\pi)^2 A(k^\mu)\, \delta(k_\mu k^\mu)\, e^{i k_\mu x^\mu}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k \, (2\pi)^2 A(k^\mu)\, \delta((k)^2)\, e^{i k\cdot x}$$

mit $\tilde f(k^\mu) = (2\pi)^2 A(k^\mu)\,\delta((k)^2) = \tilde f(\vec k, \omega)$

$f(\vec r, t) = f(x^\mu)$ gibt räumliche und zeitliche Ausdehnung des Wellenpaketes an.
$\tilde f(\vec k, \omega) = \tilde f(k^\mu)$ gibt die Verteilung im Wellenzahl-Raum und die Frequenzverteilung an, wobei diese durch die Dispersionsrelation nicht unabhängig voneinander sind.
$f = \vec E, \vec B$ oder z.B. auch $\vec A, \Phi$ ~~...~~
Quellenfreier Raum: $\vec\nabla \vec B = \vec\nabla \vec E = 0$

$$\vec\nabla \times \vec B = -\frac{1}{c^2}\dot{\vec E}$$
$$\vec\nabla \times \vec E = -\dot{\vec B}$$

Also z.B. $\operatorname{div}\vec E(\vec r, t) = \operatorname{div} \int (2\pi)^{3/2} \int \tilde{\vec E}(\vec k, t)\, e^{i\vec k\cdot\vec r}\, d^3k$

$$= (2\pi)^{3/2} \int \tilde{\vec E}(\vec k, t)\cdot \operatorname{div}\left(e^{i\vec k\cdot\vec r}\right) d^3k$$

$$= (2\pi)^{3/2} \int \left(\tilde{\vec E}(\vec k, t)\cdot i\vec k\right) e^{i\vec k\cdot\vec r}\, d^3k$$

$$= (2\pi)^{3/2} \int \left(i\vec k\cdot \tilde{\vec E}(\vec k, t)\right) e^{i\vec k\cdot\vec r}\, d^3k \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow$ $\vec k\cdot\tilde{\vec E}(\vec k, t) = 0$ Maxwell-Gl. im Wellenzahlraum

$\vec k\cdot\tilde{\vec B}(\vec k, t) = 0$ (Analog)

$$\vec k \times \tilde{\vec E} = -i\omega \tilde{\vec B}$$
$$\vec k \times \tilde{\vec B} = -\frac{i\omega}{c^2}\tilde{\vec E}$$

Oder Poissongl.

$$\Delta \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad \phi(\vec r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k\, \tilde\phi(\vec k)\, e^{i\vec k\cdot\vec r}$$

$$\rho = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k\, \tilde\rho(\vec k)\, e^{i\vec k\cdot\vec r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k\, \tilde\phi(\vec k) \underbrace{\left(\Delta e^{i\vec k\cdot\vec r}\right)}_{-k^2 e^{i\vec k\cdot\vec r}} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k\, \tilde\rho(\vec k)\, e^{i\vec k\cdot\vec r}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{k^2 \tilde\phi(\vec k) = \frac{1}{\varepsilon_0}\tilde\rho(\vec k)}$$

VII.7. Laplace-Transformation:

Was tun, wenn $f(t) \not\to 0$ für $t \to \pm\infty$?

$\Rightarrow$ Integral zur Definition von $\tilde f(\omega)$ existiert nicht, da es nicht konvergiert.

Zwar "existiert" $\tilde f(\omega)$ für $f(t) = 1$ $(= \text{const})$: $\tilde f = \sqrt{2\pi}\,\delta(\omega)$; const ;

aber $\tilde f(\omega)$ für $f(t) = t$ existiert nicht so einfach.

[Bem.: kann man mit unserer 6 Rechenregel aber ausrechnen: $\propto \frac{\partial}{\partial\omega}\delta(\omega)$]

Oder! Wir sind nur für $f(t)$, $t > 0$ interessiert, da $f(t=0)$ als Randbed. eines Initialwert-Problems gegeben ist.

$\dashrightarrow$ Laplace-Transf. $\bar f(s)$, $\mathcal{L}[f(t)]$, definiert als

$$\bar f(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

Grenze beachten! (meist $s \in \mathbb{R}$, aber $s \in \mathbb{C}$ muss man oft auch betrachten).

Oft gilt in der Praxis: $\exists s_0$: $\bar f(s)$ existiert und konvergiert $\forall s > s_0$.

$\bar f(s)$ divergiert $\forall s \le s_0$.

$\mathcal{L}$ ist linear

$$\mathcal{L}[a f_1(t) + b f_2(t)] = a\mathcal{L}[f_1(t)] + b\mathcal{L}[f_2(t)] = a\bar f_1(s) + b\bar f_2(s).$$

<u>Beispiele:</u>

$$\mathcal{L}[1] = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s} \qquad \forall\, s>0 \quad (s_0 = 0)$$

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-st}\,dt = \int_0^\infty e^{(\alpha-s)t}\,dt$$

$$= \frac{e^{(\alpha-s)t}}{\alpha-s}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s-\alpha} \qquad \forall\, s>\alpha \quad (s_0=\alpha)$$

$$\mathcal{L}[t^n] = \int_0^\infty t^n e^{-st} \overset{\text{Partielle Integration}}{=} \left[\frac{-t^n e^{-st}}{s}\right]_0^\infty - \left(\frac{n}{-s}\right)\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}\,dt$$

$n = 0,1,2,\dots$

$$\underset{n\geq 1}{=} 0 + \frac{n}{s}\mathcal{L}[t^{n-1}] \qquad \forall\, s>0 \quad (s_0=0)$$

$$= \frac{n}{s}\frac{(n-1)}{s}\frac{(n-2)}{s}\cdots\frac{1}{s}\underbrace{\mathcal{L}[t^0=1]}_{\frac{1}{s}}$$

$$= \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad \forall\, s>0 \quad (s_0=0)$$

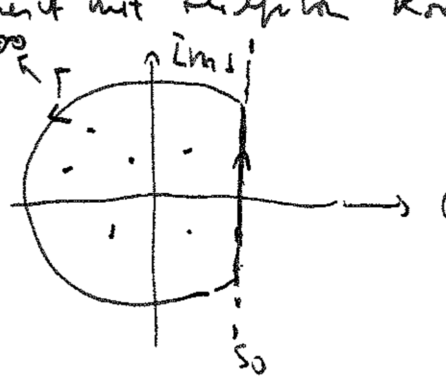
<u>Bem:</u> Inverse Laplace-Transf.

<u>schwierig:</u> Man betrachte $s\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, s \geq s_0 > 0$.

$\bar{f}(s)$ habe möglicherweise Singularitäten für $\mathrm{Re}\, s < s_0$, aber <u>keine</u> Singularitäten für $\mathrm{Re}\, s \geq s_0$!!

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s_0-i\infty}^{s_0+i\infty} e^{sx}\bar{f}(s)\,ds$$

Berechnung meist mit Hilfe von Kontour-Integration



$$f(x) = \sum_i \mathrm{Res}_{s_i}\, \bar{f}(s)e^{s_i x}$$

falls Integration über $\Gamma \to 0$ für Radius $\Gamma \to \infty$.

VII.8 Eigenschaften der Laplace-Transf.

$$\mathcal{L}[f'(t)] = -f(0) + s\bar{f}(s) \qquad s>0$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = -f'(0) + s\left(s\bar{f}(s) - f(0)\right) \qquad s>0$$

usw.

Denn $\int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt = \left[f(t) e^{-st}\right]_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$

$= -f(0) + s\bar{f}(s)$ mit partieller Integration

Allgemein: $\mathcal{L}\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} f(t)\right] = s^n \bar{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} \frac{\partial^k}{\partial t^k} f(t)\Big|_{t=0} \qquad s>0$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)\,du\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)]$$

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = \bar{f}(s-\alpha)$$

$$\mathcal{L}[f(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha}\bar{f}\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-)^n \frac{\partial^n}{\partial s^n}\bar{f}(s)$$

$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty \bar{f}(s')\,ds'$ falls $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t}$ existiert.