III. Integralsätze

- Gauss-scher Satz / Divergenz-Satz
- Stoke-scher Satz

1. Gauss-scher Satz.

S geschlossene Oberfläche, die Volumen V umschließt.

Totale Fluss aus S $\longleftrightarrow$ Integral der Divergenz von $\vec A$ über V
eines Vektorfeldes $\vec A$

Sei $\vec A$ stetig diffbar.

Wir hatten definiert: $\mathrm{div}\,\vec A = \lim\limits_{V\to 0}\left(\frac{1}{V}\oint_S \vec A\cdot d\vec S\right)$

Zerlege V in viele kleine Volumina V_p, $p=1,\dots,N\gg 1$.

$$\Rightarrow \quad (\mathrm{div}\,\vec A)\,V_p \simeq \oint_{S_p}\vec A\cdot d\vec S_p .$$

$$\Rightarrow \quad \sum_p(\mathrm{div}\,\vec A)\,V_p \simeq \sum_p\oint_{S_p}\vec A\cdot d\vec S_p$$

$$\boxed{\int_V \mathrm{div}\,\vec A\,dV = \oint_S \vec A\cdot d\vec S} \qquad \left(\text{für } V_p\to 0 \text{ mit } N\to\infty\right)$$

Man beachte, daß sich die Integrationen über die innen liegenden Oberflächen angrenzender Teilvolumina $V_p, V_{p'}$ gerade wegheben, da einmal mit Normalenvektor $\hat n_{pi}$ und einmal mit $\hat n_{p'i} = -\hat n_{pi}$ über die gleiche Fläche dS_{pi} integriert wird.
Nur die Teilflächen $\in S$ bleiben übrig.

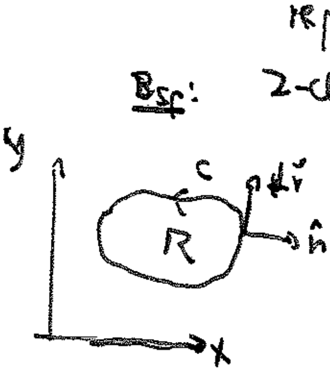
Bem: Der Satz gilt für einfach und mehrfach zusammenhängende Oberflächen.

Bsp: $\vec A = \vec r$: $\int_V \mathrm{div}\,\vec r\,dV = \int_V 3\,dV = 3V = \oint_S \vec r\cdot d\vec S$

reproduziert unser Resultat von letzter Woche.

Bsp: 2-dim Version! $\quad d\vec r = dx\,\hat e_x + dy\,\hat e_y$ = Tangentialvektor für C

$\hat n = +dy\,\hat e_x - dx\,\hat e_y$ = Normalenvektor, der aus R hinauszeigt.



$$\int_R \mathrm{div}\,\vec A\cdot dx\,dy = \oint_C \vec A\cdot\hat n\,ds = \boxed{\oint_C (A_x\,dy - A_y\,dx)}$$

$\int_R(\partial_x A_x + \partial_y A_y)\,dx\,dy$

Greenscher Satz!

2. Green'sche Sätze

Φ, Ψ skalare Fkt., stetig diffbar in V, Rand von V sei S.

$\vec{A} := \Phi \operatorname{grad} \Psi = \Phi \nabla \Psi$.

Divergenz-Satz: $\boxed{\oint_S \Phi \nabla \Psi \cdot d\vec{S}} = \int_V \nabla \cdot (\Phi \nabla \Psi)\, dV$

$$= \int_V \left[\Phi \nabla^2 \Psi + (\nabla \Phi) \cdot (\nabla \Psi) \right] dV$$

$$\boxed{= \int_V \left[\Phi \Delta \Psi + (\nabla \Phi) \cdot (\nabla \Psi) \right] dV}$$

(1. Greensche Satz).

$\vec{A} := \Phi \operatorname{grad} \Psi - \Psi \operatorname{grad} \Phi = \Phi \nabla \Psi - \Psi \nabla \Phi$:

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \boxed{\oint_S \left[\Phi \nabla \Psi - \Psi \nabla \Phi \right] d\vec{S} = \int_V \left[\Phi \Delta \Psi - \Psi \Delta \Phi \right] dV}$$

(2. Greensche Satz).

Weitere Versionen des Divergenz-Satzes:

Mit $\vec{A} = \Phi \cdot \vec{c}$, $\vec{c}$ ein konstanter Vektor, Φ skalare Fkt:

$$\int_V \operatorname{grad} \Phi \, dV = \oint_S \Phi \, d\vec{S}$$

Mit $\vec{A} = \vec{B} \times \vec{c}$, $\vec{c}$ ein konst. Vektor, $\vec{B}$ ein Vektorfeld:

$$\int_V \operatorname{rot} \vec{B} \, dV = \oint d\vec{S} \times \vec{B}$$

3. Physikalische Nutzen:

Integralausdruck (aus Beobachtung) $\to$ Differentialgleichung (für Theorie)

Bsp: Komprimierbare Flüssigkeit, Dichte $\rho(\vec{r}, t)$, Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r}, t)$. Es werde keine Flüssigkeit erzeugt oder vernichtet (Erhaltung der Masse).

$\Rightarrow$ Für ein gegebenes Volumen ist die Änderung der darin enthaltenen Masse allein durch die Netto-Rate von Fluss in das Vol. hinein oder aus dem Vol. heraus gegeben.

$$\dot{M} = -\oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

$$M = \int_V \rho\, dV \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV + \oint_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{S} = 0$$

$\downarrow$ Gauss Satz!!

$$\int_V \dot{\rho}\, dV + \int_V \mathrm{div}(\rho\vec{v})\, dV = 0$$

$$\Rightarrow \int_V [\dot{\rho} + \mathrm{div}(\rho\vec{v})]\, dV = 0$$

V beliebig $\Rightarrow$

$$\boxed{\dot{\rho} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0}$$ Kontinuitätsgleichung

$\rho =$ Elektr. Ladungsdichte, Wärmeinhalt, ...

Inkompressible Flüssigkeit: $\rho = \text{const}$ und Kontinuitätsgl. wird zu $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$.

4. Quellen & Senken: Eine Quelle am Ursprung produziere einen radial symmetr. Fluss Q $[m^3 sec^{-1}]$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{1}{4\pi r^3} Q \vec{r} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}.$$

$$\oint_{S_1} \vec{v}\cdot d\vec{S} = |\vec{v}|\, 4\pi r^2 = Q$$ für S_1 eine Kugeloberfläche mit Mittelpkt = Ursprung.

$\vec{v}$ ist am Ursprung singulär und nicht diff'bar!!

$$\oint_{S_2} \vec{v}\cdot d\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\, \vec{v}\, dV = 0$$ für S_2 Kugeloberfläche mit Ursprung außerhalb!

$$\mathrm{div}\,\vec{v} \overset{!}{=} Q\,\delta(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad \int_V f(\vec{r})\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')\, dV = \begin{cases} f(\vec{r}') & \vec{r}' \in V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dirac-Delta-Distribution (keine Fkt!!)

Damit bleibt der Gauss-Satz gültig

$$\oint_S \vec{v}\cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\vec{v}\, dV$$

$$\vec{v} = \frac{1}{4\pi}\sum_i Q_i \frac{(\vec{r}-\vec{a}_i)}{|\vec{r}-\vec{a}_i|^3}$$

$$\operatorname{div}\vec{v} = \sum_i Q_i\, \delta(\vec{r}-\vec{a}_i)$$

Quellen & Senken = Punktladungen, $\vec{v} \rightsquigarrow \vec{E}$, ... Elektrostatik

5. Stokesche Satz

$$\boxed{\int_S \operatorname{rot}\vec{A}\cdot d\vec{S} \quad \int_S (\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r}}$$

[Allgemeine Form:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M}\omega$$

für ω Differentialform]

Beweis analog zu Gauss-Satz via

$$(\operatorname{rot}\vec{A})\cdot \hat{n}_p S_p \approx \oint_{C_p} \vec{A}\cdot d\vec{r}_p$$ aus <u>Def</u>. von Rotation.

Mit $\vec{A} = \Phi\vec{c}$, $\vec{c}$ = konst, Φ skalare Fkt $\Rightarrow$

$$\int_S d\vec{S}\times \operatorname{grad}\Phi = \oint_C \Phi\, d\vec{r}$$

Mit $\vec{A} = \vec{B}\times\vec{c}$, $\vec{c}$ = konst, $\vec{B}$ = Vektorfeld $\Rightarrow$

$$\int_S (d\vec{S}\times\nabla)\times\vec{B} = \oint_C d\vec{r}\times\vec{B}.$$

<u>physikalische Beispiele:</u>

Ampere-Gesetz $\rightsquigarrow$ Maxwell-Gleichung: (konstante Ströme)

$\hookrightarrow$ $$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

$\vec{j}$: Stromdichte

Stokes $\Vert$

$$\int_S \operatorname{rot}\vec{B}\cdot d\vec{S}$$

$\Rightarrow$ $$\int_S (\operatorname{rot}\vec{B} - \mu_0\vec{j})\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\boxed{\nabla\times\vec{B} - \mu_0\vec{j} = 0}$$ Maxwell-Gl.

Analog: Faraday-Gesetz der elektromag. Induktion $\rightsquigarrow$ $\boxed{\operatorname{rot}\vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0}$

Nochmal inkompressible Flüssigkeit.

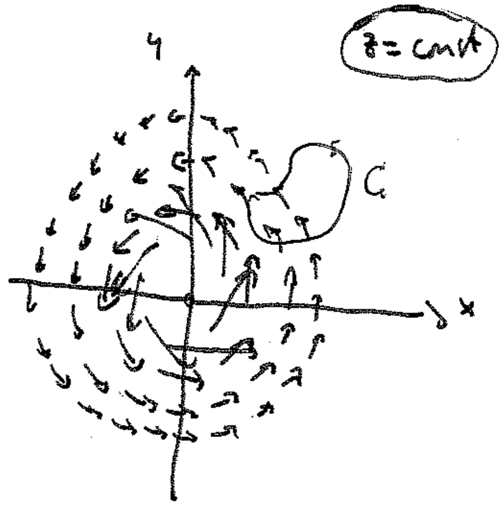
Kontinuitätsgleichung für Quellen- und Senkenfreie Fall:

$\operatorname{div} \vec{v} = 0$

$\operatorname{div} \vec{v} = \sum_i Q_i \, \delta(\vec{r} - \vec{a}_i)$ mit Quelle und Senke.

Betrachte nun einen Vortex-Fluss (Wirbel).

Zylinder-Koord. (ρ, φ, z) → $\vec{v} = \frac{1}{\rho} \hat{e}_\varphi$ ist ein Geschwindigkeitsfeld für einen Wirbel am Ursprung, singulär am Ursprung $\rho = 0$.



Es gilt: $\nabla \times \vec{v} = \operatorname{rot} \vec{v} = 0 \quad \forall \rho > 0$

$\vec{v}$ singulär für $\rho = 0$.

$\Rightarrow \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$ für alle Pfade C, die die Achse $\rho = 0$ nicht einschließen

$\oint_{C'} \vec{v} \cdot d\vec{r} = 2\pi$, falls C' die Achse $\rho = 0$ einschließt.

$$\left[\oint_{C'} \frac{1}{\rho} \hat{e}_\varphi \underbrace{\rho \, d\varphi \cdot \hat{e}_\varphi}_{d\vec{r}} = \oint_{C'} d\varphi = 2\pi \right]$$

[für C' Kreis in x-y-Ebene]

$\Rightarrow \operatorname{rot} \vec{v} = 2\pi \, \delta(\rho)$ $\quad \delta$ = Dirac-Delta-Distribution.

Da $\operatorname{rot} \vec{v} = 0 \ \forall \rho > 0$ $\exists$ skalare Fkt Ψ mit $\vec{v} = \operatorname{grad} \Psi$.

In der Tat, $\Psi = \varphi$ = Polarwinkel ist so eine Fkt., $\operatorname{grad} \varphi = \hat{e}_\varphi$

$\Rightarrow \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = 2\pi n$ mit n = # Windungen, die C um Achse $\rho = 0$ macht.

φ ist ein mehrdeutiges Potential!

Bem.: Magnetostatik: Vortex-Linie ($\rho = 0$ Achse) → Stromdurchflossene Drähte

$\vec{v} \longrightarrow \vec{B}$