IV. Partielle Differentialgleichungen

PDG / PDE.

$n \geq 2$ Variablen $x_i, t, \ldots$

$f(x_1, x_2, \ldots, t)$, $\partial_i f(x_1, x_2, \ldots, t)$ $\qquad \partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$

$\partial_t f(x_1, x_2, \ldots, t)$

Häufigster Fall in der Physik: Lineare PDEs, $\leq$ zweiter Ordnung.

IV.1 Die wirklich wichtigen PDEs

- 2^{te} Ordnung, linear
- Oft beschreibt ein Typ von Gleichung viele verschiedene Phänomene!
- Meist sind $\vec{r}, t$ die unabhängigen Variablen.
  (aber ausgedrückt in den Koordinatenfktn. des gewählten Koord.-systems)
  Bem: Die Schreibweise $\nabla^2 = \Delta$ ist koordinaten-unabhängig.

① Wellengleichung:

$$\boxed{\Delta \Phi = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Phi} \qquad \left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right)\Phi = 0$$

Φ beschreibt die Abweichung vom Gleichgewichtszustand schwingender Systeme (Membrane, Saite, Festkörper, Gas, Flüssigkeit, …) oder schwingender / oszillierender Felder, z.B. in der Theorie des Elektromagnetismus.

$c =$ Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle / Propagationsgeschw.
z.B. Schallgeschw.
Lichtgeschw.

Def: $x^0 = ct$

$x^i = x, y, z$

$x_0 = x^0$

$x_i = -x, -y, -z$

$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$

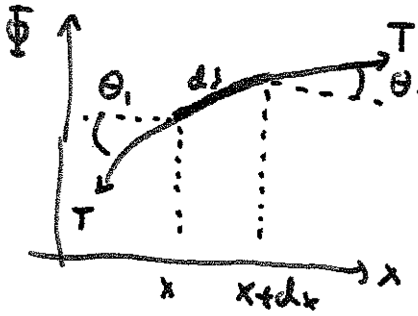
$x_\mu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2 = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta$$

$$\Rightarrow \Box \Phi = 0$$

<u>Bsp:</u> Saite, gleichmäßige Spannung T.
homogene Dichte ρ [kg m^{-1}]
Anfangsbedingung: Entlang x-Achse.

$\Phi(x,t)$ gibt transversale Auslenkung weg von x-Achse an.



Senkrechte Kraft:

$$dF = T\sin\theta_2 - T\sin\theta_1$$

$$\theta_1, \theta_2 \ll 1 \implies \sin\theta_i \approx \tan\theta_i = \partial_x \Phi$$

$$\implies dF = T\left[\partial_x \Phi(x+dx,t) - \partial_x \Phi(x,t)\right]$$

$$\approx T\,\partial_x^2 \Phi(x,t)\,dx$$

Masse des Saitenelementes: $m = \rho\,ds \approx \rho\,dx$ } für kleine Vibrationen

Beschleunigung: $a = \ddot{\Phi} = \partial_t^2 \Phi$.

$dF = ma$ nach Newton

$$\implies \rho\,dx\,\partial_t^2 \Phi = T\,\partial_x^2 \Phi\,dx$$

$$\text{mit } c^2 := \frac{T}{\rho} \implies \partial_x^2 \Phi = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \Phi \quad \checkmark$$

<u>Bem</u>: Sei $f(x,t)$ eine äußere, transversal wirkende Kraft:

$$\implies \rho\,\partial_t^2 \Phi = T\partial_x^2 \Phi + f(x,t).$$

Höhe-dim: Membrane

② <u>Diffusionsgleichung:</u> (Wärmeleit-Gleichung)

$$\boxed{\kappa\,\Delta\Phi = \partial_t \Phi}$$

Φ beschreibt Wärme/Temperatur in einem Gebiet ohne Quelle und Senken, chemische Konzentration, ...

κ = Diffusionskoeffizient, Diffusivität.

Bsp: Material mit gleichmäßiger Wärmeleitfähigkeit k, spezifische Wärmekapazität C_s und Dichte ρ.

Sei V ein beliebiges Volumen im Innern des Materialkörpers, mit Oberfläche S (kann auch Oberfläche des Körpers sein).

Rate des Wärmeflusses in Richtung $\hat{r}$ $\propto$

-(Komponente des Temperaturgradienten in diese Richtung)

$= (-k \operatorname{grad} \Phi) \cdot \hat{r}$

Der gesamte Fluss aus V heraus ist pro Zeiteinheit

$$-\frac{dQ}{dt} = \int_S (-k \nabla \Phi) \cdot \hat{n} \, dS \underset{\text{Gauss}}{=} \int_V \nabla \cdot (-k \nabla \Phi) \, dV$$

(Q = gesamte Wärmeenergie in V zur Zeit t.)

Andererseits ist $Q = \int C_s \rho \Phi \, dV$

$$\Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = \int_V C_s \rho \, \partial_t \Phi \, dV$$

Da V beliebig war, ~~folgt~~ folgt mit $\kappa = \frac{k}{C_s \rho}$:

$$\kappa \Delta \Phi = \partial_t \Phi$$

Bem: Wärmequelle mit Dichte $f(\vec{r}, t)$:

$$k \Delta \Phi + f(\vec{r}, t) = C_s \rho \, \partial_t \Phi .$$

Allgemeinster Fall: k, C_s, ρ abhängig von $\vec{r}$:

$$k \Delta \Phi \rightarrow \nabla \cdot (k \nabla \Phi) .$$

③ Laplace-Gleichung:

$$\partial_t \Phi \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta \Phi = 0}$$

Φ beschreibt die Gleichgewichts-Temperaturverteilung eines Körpers nach langer Zeit (ohne Wärmequelle), Gravitationspotential in einem Gebiet ohne Massen, Elektrostat. Potential -"- ohne Ladungen, Fluss einer inkompress. Flüssigkeit ohne Quelle, Senke, Vortices

Φ = Geschw.-Potential, $\vec{v} = \operatorname{grad} \Phi$ = Geschw.-Feld.

④ <u>Poisson-Gleichung:</u>

$$\boxed{\Delta \Phi = \tilde{\rho}(\vec{r})}$$

Laplace-Gl. mit Quellen (Massen, Ladungen, Wärmequellen, ...)

$\tilde{\rho}(\vec{r})$ = Quellen-Dichte.

z.B. $\Delta\Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r})$

$\Delta\Phi = 4\pi G_N \rho(\vec{r})$

$\check{\rho}(\vec{r})$ hat zusätzl. phys. Konstanten zur reinen Dichteverteilung.

⑤ <u>Schrödinger-Gleichung:</u>

$$\boxed{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})\right)\Psi = i\hbar\,\partial_t \Psi}$$

Ψ = QM-Wellenfkt. eines nicht-relativist. Teilchens der Masse m, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h: Planck-sches Wirkungsquantum.

$|\Psi|^2$ = Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens am Ort $\vec{r}$ zur Zeit t.

<u>Bem:</u> Sehr ähnlich zur Diffusionsgleichung!

Für $V \equiv 0$ entspricht dies eine Diffusionsgleichung mit imaginärem k!

IV. 2. Allgemeine Form der Lösung

Zunächst (zur Vereinfachung) nur 2 unabh. Variablen, x, y.

Menge der Fktn. $u(x,y)$ enthält Untermengen

$$U[p] = \{ u(x,y) \mid \exists f(p(x,y)) : u(x,y) = f(p) \}$$

für Fktn. $p(x,y)$.

In diese Untermenge sind die $u(x,y)$ also Fktn. eine Variable p.

Bsp:
$$u_1(x,y) = x^4 + 4(x^2y + y^2 + 1)$$
$$u_2(x,y) = \sin x^2 \cos 2y + \cos x^2 \sin 2y$$
$$u_3(x,y) = \frac{x^2 + 2y + 2}{3x^2 + 6y + 5}$$

Setze $p(x,y) = x^2 + 2y \Rightarrow$

$$u_1(x,y) = (x^2+2y)^2 + 4 = p^2 + 4 = f_1(p)$$
$$u_2(x,y) = \sin(x^2+2y) = \sin p = f_2(p)$$
$$u_3(x,y) = \frac{(x^2+2y)+2}{3(x^2+2y)+5} = \frac{p+2}{3p+5} = f_3(p).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_x u_i = \partial_p f_i \, \partial_x p = 2x f_i' \\ \partial_y u_i = \partial_p f_i \, \partial_y p = 2 f_i' \end{cases}$$

$\Rightarrow \partial_y p \, \partial_x u_i = \partial_x p \, \partial_y u_i$ bzw. für $p = x^2 + 2y$

(*) $$\partial_x u_i = x \, \partial_y u_i$$

$\Rightarrow$ Jede Fkt $f(p) = f(x^2+2y)$ löst (*).

Oft erlaubt eine Symmetrie des phys. Problems, dieses in weniger Variablen zu formulieren und, wie im Bsp., PDEs abzuleiten.

IV. 3 Allgemeine und spezielle Lösung

Die exakte Form einer Lösung für eine gegebene Situation wird durch die Randbedingungen gegeben/fixiert.

Bsp: PDE in 2 Variablen x, y: Randbed. = Vorgabe von $u(x,y)$ auf einer kontinuierlichen Pkt-Menge in xy-Ebene, z.B. auf einer Linie.

Im folgenden – der Einfachheit halber – weiter nur 2 Variablen, Verallgemeinerung auf n Variablen aber klar.

1 PDEs 1te Ordnung:

Allgemeinste Form:

$$A(x,y)\,\partial_x u + B(x,y)\,\partial_y u + C(x,y)\,u = R(x,y)$$

Bem: A oder $B=0$ $\Rightarrow$ gewöhnl. Dgl.

Zunächst $C=R=0$. (homogener Fall)

Annahme: $u(x,y)=f(p)$ für ein $p(x,y)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_x u = \partial_p f\, \partial_x p \\ \partial_y u = \partial_p f\, \partial_y p \end{cases}$$

(1) $$\Rightarrow \underbrace{\left[A(x,y)\,\partial_x p + B(x,y)\,\partial_y p\right]}_{\stackrel{!}{=}0} \underbrace{\partial_p f}_{\neq 0 \text{ im allg.}} = 0$$

$f(p)$ bleibt konstant bei variierendem x,y (d.h. p bleibt konstant), wenn

(2) $$dp = \partial_x p\,dx + \partial_y p\,dy = 0$$

(3) (1) $\Leftrightarrow$ (2) wenn $\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B}$ gilt.

Integration von (3) liefert die Form von p.

Bsp: $\underbrace{x}_{A}\,\partial_x u - \underbrace{2y}_{B}\,\partial_y u = 0$

(3) $\hat{=}$ $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y}$ also $x = \text{const}\,\frac{1}{\sqrt{y}}$

Linien in xy-Ebene, die (3) erfüllen, lassen $u(x,y)$ konstant.

Vermeidet nachher fraktionale Potenzen.

$\text{const} = \sqrt{p}$ $\Rightarrow$ $p = x^2 y$

$\Rightarrow$ $u(x,y) = f(x^2 y)$

Randbedingungen: z.B. $u(x=1,y) = 2y+1$:

$$= 2(x^2 y)+1\Big|_{x=1}$$

wird durch $u(x,y) = 2x^2y+1$ gelöst.

z.B. $u(1,1) = 4$:

wird z.B. durch $u(x,y) \equiv 4$

$u(x,y) = 4x^2 y$

$u(x,y) = x^2 y + 3$ gelöst, ...

Nun $C \neq 0$:

Statt $u(x,y) = f(p)$

suchen wir nun $u(x,y) = h(x,y)\, f(p)$

$$\begin{cases} \partial_x u = (\partial_x h) f + h\, \partial_p f\, \partial_x p \\ \partial_y u = (\partial_y h) f + h\, \partial_p f\, \partial_y p \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(A\partial_x h + B\partial_y h + Ch\right)}_{\text{ursprüngl. Gl. für } h \text{ statt } u.} f + \left(A\partial_x p + B\partial_y p\right) h\, \partial_p f = 0$$

$\Rightarrow$ Wenn h eine (noch so einfache) Lsg der PDE ist,

dann bestimmt sich p wieder durch eine Gl. der Form

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B}.$$

Inhomogene Gleichungen & Probleme:

u_1, u_2 Lsg. einer PDE $\Rightarrow$ $\lambda u_1 + \mu u_2$ ebenfalls Lsg.

(Superpositionsprinzip). (für $R \equiv 0$!!)

Def.: Eine PDE heißt homogen $\Leftrightarrow$

$\left(u(x,y) = \text{Lsg} \Rightarrow \lambda u(x,y) = \text{Lsg} \ \forall \lambda = \text{const}\right)$

Ein Problem heißt homogen $\Leftrightarrow$

Die Randbedingungen sind ebenfalls homogen!

Für homogene Probleme gilt:

Allgemeine Lsg des $\underline{\underline{\text{in}}}$homogenen Problems $(R \neq 0)$

$=$ spezielle Lsg. des inhomogenen Problems

$+$ allgemeine Lsg. der homogenen Problems.