V.4 Die Greensche Funktion

Bis jetzt "leere" Physik im quellenfreien Raum
(keine Inhomogenitäten).
Mit Quellen wird z.B. Laplace-Gl. $\Delta u = 0$ zu Poisson-Gl. $\Delta u = \rho$
Bezeichne $\mathcal{L}$ einen Differentialoperator, der linear ist, z.B. $\mathcal{L} = \Delta$,
oder $\mathcal{L} = \Delta + k^2$ (für Helmholtz-Gl.)

$$\mathcal{L} u(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \quad \text{allg. inhomogene Gl.}$$

Erinnerung: Problem heißt inhomogen, wenn
mit Lsg. $u(\vec{r})$ eine Vielfaches $\lambda u(\vec{r})$ nicht auch
Lsg. ist.

Zunächst: Homogene Randbed., im allg. der Art

Dirichlet: $S = \partial V \quad u|_S \equiv 0$

Neumann: $S = \partial V \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S \equiv 0$.

Grundidee der Greenschen Fkt: Man löse das Problem für
eine standardisierte Einheits-Inhomogenität, (Einheits-Puls,
Punkt-Quelle):

$$\mathcal{L} u(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

habe Lösung

$$\mathcal{L} G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad , \quad G \text{ heißt } \underline{\text{Greensche Fkt.}}$$

G muss natürlich die Randbed. erfüllen.
$\mathcal{L}$ ist ein Differentialoperator bzgl. $\vec{r}$, nicht $\vec{r}_0$.
Man erhält dann die allgemeine Lsg für

$$\mathcal{L} u(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$$

über

$$u(\vec{r}) = \int dV_{\vec{r}_0}\, G(\vec{r}, \vec{r}_0)\, \rho(\vec{r}_0) \quad \text{(hier wird über } \vec{r}_0 \text{ integriert!)}$$

denn:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} u(\vec{r}) &= \mathcal{L} \int dV_{\vec{r}_0}\, G(\vec{r}, \vec{r}_0)\, \rho(\vec{r}_0) \\
&= \int dV_{\vec{r}_0} \left(\mathcal{L}\, G(\vec{r}, \vec{r}_0)\right) \rho(\vec{r}_0) \\
&= \int dV_{\vec{r}_0}\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\, \rho(\vec{r}_0) \\
&= \rho(\vec{r}) \quad \text{nach } \underline{\text{Def}} \text{ der Dirac-Distribution.} \checkmark
\end{aligned}$$

• Konstruktion der Greenschen Fkt.

Wir lösen zunächst das Eigenfunktions-Problem für $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}\, u_n(\vec r) = \lambda_n u(\vec r)$$

denn das können wir schon. Dies ist ja nichts anderes als

$$(\mathcal{L} - \lambda_n) u_n(\vec r) = 0$$

▶ Die Helmholtz-Gl. ist die Eigenwert-Gl. für den Laplace-Operator zum EW $\lambda = -k^2$!!

Diese Methode funktioniert, wenn $\mathcal{L}$ <u>hermitesch</u> ist.

<u>Def</u>: Ein Diff-Op. $\mathcal{L}$ heißt hermitesch $\Leftrightarrow$

$$\int_V v^*(\vec r)\, \mathcal{L}\, w(\vec r)\, dV = \left[\int_V w^*(\vec r)\, \mathcal{L}\, v(\vec r)\, dV \right]^*$$

für beliebige Fkt$_n$ v, w, die die Randbed. erfüllen.

$$\langle v | \mathcal{L} | w \rangle = \langle v | \mathcal{L} w \rangle \stackrel{!}{=} \langle \mathcal{L} v | w \rangle = \langle w | \mathcal{L} v \rangle^* = \langle w | \mathcal{L} | v \rangle^*$$

<u>Korollar</u>: Die möglichen EW$_e$ λ_n eines hermiteschen Operators $\mathcal{L}$ sind reell:

Bew: Wähle $v = w = u_n$ Eigenlösung:

$$\int_V u_n^*(\vec r)\, \mathcal{L}\, u_n(\vec r)\, dV = \left(\int_V u_n^*(\vec r)\, \mathcal{L}\, u_n(\vec r)\, dV \right)^*$$

$$\lambda_n \int_V u_n^*(\vec r) u_n(\vec r)\, dV = \lambda_n^* \int_V u_n^*(\vec r)\, u_n(\vec r)\, dV \quad \Rightarrow \lambda_n^* = \lambda_n$$

$$\langle u_n | \mathcal{L} u_n \rangle = \langle \mathcal{L} u_n | u_n \rangle = \langle u_n | \mathcal{L} u_n \rangle^*$$
$$\lambda_n \langle u_n | u_n \rangle = \lambda_n^* \langle u_n | u_n \rangle$$
$$\Rightarrow (\lambda_n - \lambda_n^*) \| u_n \|^2 = 0$$

Die u_n müssen ebenfalls die Randbed. erfüllen.

<u>Korollar</u>: Eigenlösungen zu verschiedenen EW$_e$ sind orthogonal.

Bew:

$$\int_V u_m^*\, \mathcal{L}\, u_n\, dV = \left(\int_V u_n^*\, \mathcal{L}\, u_m\, dV \right)^*$$

$$\lambda_n \int u_m^* u_n\, dV \quad \lambda_m^* \left(\int u_n^* u_m\, dV \right)^*$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_n - \lambda_m)}_{\neq 0} \int u_m^* u_n\, dV = 0$$

$\lambda_m^* = \lambda_m$

$$\Rightarrow \int u_m^* u_n\, dV = 0 \text{ für } m \neq n.$$

$$\langle u_m | \mathcal{L} u_n \rangle = \lambda_n \langle u_m | u_n \rangle$$
$$\langle \mathcal{L} u_m | u_n \rangle = \lambda_m^* \langle u_m | u_n \rangle = \lambda_m \langle u_m | u_n \rangle$$
$$\Rightarrow (\lambda_m - \lambda_n) \langle u_m | u_n \rangle = 0$$

Satz: $$G(\vec r,\vec r_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} u_n(\vec r)\, u_n^*(\vec r_0)$$

wenn EW $\lambda = 0$ nicht vorkommt und die EWe nicht entartet sind.

"Bew:" Die Eigenlsgn. bilden vollst. orthogonale Systeme.

$\Rightarrow$ $\mathcal{L} u(\vec r) = \rho(\vec r)$ kann als Superposition

$$u(\vec r) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n u_n(\vec r)$$

gelöst werden.

$$\rho(\vec r) = \mathcal{L} u(\vec r) = \mathcal{L}\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n u_n(\vec r)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \mathcal{L} u_n(\vec r)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \lambda_n u_n(\vec r)$$

$$\Rightarrow u_m^*(\vec r)\rho(\vec r) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \lambda_n u_m^*(\vec r)\, u_n(\vec r)$$

$$\Rightarrow \int_V u_m^*(\vec r\,')\rho(\vec r\,')\, dV' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \lambda_n \underbrace{\int_V u_m^*(\vec r\,')\, u_n(\vec r\,')\, dV'}_{=0 \text{ für } m \neq n}.$$

für später Integration über $\vec r\,'$ statt $\vec r$

$$\Rightarrow C_m = \frac{1}{\lambda_m} \frac{\int_V u_m^*(\vec r\,')\rho(\vec r\,')\, dV'}{\int_V u_m^*(\vec r\,')\, u_m(\vec r\,')\, dV'}$$ und damit ist die

vollständige Lsg:

$$u(\vec r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \frac{\int_V u_n^*(\vec r\,')\rho(\vec r\,')\, dV'}{\int_V u_n^*(\vec r\,')\, u_n(\vec r\,')\, dV'}\, u_n(\vec r)$$

Die Eigenlösungen seien orthonormiert, d.h.

$$\int_V dV\, u_n^*(\vec r)\, u_n(\vec r) = 1 \quad \forall n$$

$$\Rightarrow u(\vec r) = \int_V dV' \underbrace{\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} u_n(\vec r)\, u_n^*(\vec r\,')\right]}_{G(\vec r,\vec r\,')} \rho(\vec r\,')$$

$$\Rightarrow \boxed{G(\vec r,\vec r_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n(\vec r)\, u_n^*(\vec r_0)}{\lambda_n}}$$

$$|u\rangle = \sum_n c_n |u_n\rangle$$

$$|\rho\rangle = \mathcal{L}|u\rangle = \mathcal{L}\Big(\sum_n c_n |u_n\rangle\Big) = \sum_n c_n \mathcal{L}|u_n\rangle = \sum_n \lambda_n c_n |u_n\rangle$$

$$\langle u_m|\rho\rangle = \sum_n \lambda_n c_n \langle u_m|u_n\rangle$$

$$\Rightarrow c_m = \frac{1}{\lambda_m} \frac{\langle u_m|\rho\rangle}{\langle u_m|u_m\rangle} \quad \text{und} \quad |u\rangle = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \frac{\langle u_n|\rho\rangle}{\langle u_n|u_n\rangle} |u_n\rangle$$

$$\langle u_m|u_n\rangle = \delta_{nm} \quad \text{VONS} \Rightarrow$$

$$|u\rangle = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \langle u_n|\rho\rangle |u_n\rangle$$

$$= \underbrace{\sum_n \frac{1}{\lambda_n} |u_n\rangle\langle u_n|}_{G} |\rho\rangle$$

$$= G|\rho\rangle \qquad G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} |u_n\rangle\langle u_n|$$

$$u(\vec{r}) = \langle \vec{r}|u\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \frac{\langle u_n|\rho\rangle}{\langle u_n|u_n\rangle} \langle r|u_n\rangle$$

$$\overset{\text{VONS}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \langle r|u_n\rangle\langle u_n|\rho\rangle$$

$$= \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \langle r|u_n\rangle\langle u_n|\vec{r}\,'\rangle\langle \vec{r}\,'|\rho\rangle \, d^3\vec{r}\,'$$

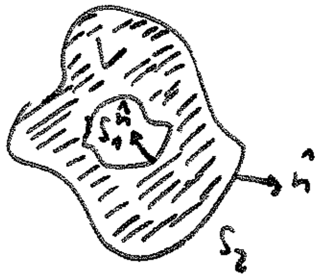
$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \langle r|u_n\rangle\langle u_n|\vec{r}_0\rangle$$

(1) Allgemeine Randwertprobleme:

Inhomogene Probleme (inhomog. Randbed., inhomog. Gleichungen) am Beispiel der Poisson-Gl.

$$\Delta u(\vec r) = \rho(\vec r),$$

zu lösen in V mit $\partial V = S$.



$S = S_1 \cup S_2$

S kann mehrfach zshgd. sein!

Typische inhomog. Randbed.

(D) Dirichlet: $u(\vec r)\big|_S$ vorgegeben

(N) Neumann: $\left.\frac{\partial u(\vec r)}{\partial n}\right|_S$ vorgegeben

$S_{tot} = S \cup S_\infty$

S_∞ = Sphäre mit Radius $\to \infty$

Für V außerhalb von S

Wir nutzen Greenschen ~~Satz~~ 2ten Satz:

$$\int_V (\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi)\, dV = \int_S (\phi\vec\nabla\psi - \psi\vec\nabla\phi)\cdot\hat n\, dS$$

und setzen $\vec\nabla\psi\cdot\hat n\, dS = \left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right) dS$.

G muß gelten $\Delta G(\vec r,\vec r_0) = \delta(\vec r-\vec r_0)$, $\vec r_0 \in V$

Zunächst: keine Randbed. für $G(\vec r,\vec r_0)$

Setze $\phi = u(\vec r)$, $\psi = G(\vec r,\vec r_0)$ $\Rightarrow$

$$\int_V \left(u(\vec r)\Delta G(\vec r,\vec r_0) - G(\vec r,\vec r_0)\Delta u(\vec r)\right) dV_{\vec r} = \int_S \left(u(\vec r)\frac{\partial G(\vec r,\vec r_0)}{\partial n} - G(\vec r,\vec r_0)\frac{\partial u(\vec r)}{\partial n}\right) dS_{\vec r}$$

$$\parallel$$

$$\int_V \left(u(\vec r)\delta(\vec r-\vec r_0) - G(\vec r,\vec r_0)\rho(\vec r)\right) dV_{\vec r}$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{u(\vec r_0) = \int_V G(\vec r,\vec r_0)\rho(\vec r)\, dV_{\vec r} + \int_S \left(u(\vec r)\frac{\partial G(\vec r,\vec r_0)}{\partial n} - G(\vec r,\vec r_0)\frac{\partial u(\vec r)}{\partial n}\right) dS_{\vec r}} \quad \boxed{G}$$

Das ist die Verallgemeinerung der Greenschen Gleichung für inhomog. Randbed.

② Dirichlet-Probleme

$$G(\vec r,\vec r_0)=0 \quad \text{für } \vec r\in S, \qquad u(\vec r)=f(\vec r) \text{ auf } S$$

$$\Rightarrow u(\vec r_0)=\int_V G(\vec r,\vec r_0)\rho(\vec r)\,dV_{\vec r}+\int_S f(\vec r)\,\frac{\partial G(\vec r,\vec r_0)}{\partial n}\,dS_{\vec r}$$

$\Rightarrow$ zwei Bedingungen: • $\Delta G(\vec r,\vec r_0)=\delta(\vec r-\vec r_0)$

• $G(\vec r,\vec r_0)=0$ für $\vec r\in S$.

Ansatz: $G(\vec r,\vec r_0)=F(\vec r,\vec r_0)+H(\vec r,\vec r_0)$

$\Delta F=\delta$ aber keine Randbed. bzw. andere Randbed.

$\Delta H=0$ und $H(\vec r,\vec r_0)=0$ für $\vec r\in S$.

$\Downarrow$ bzw. $\underset{F+H}{\underset{\shortparallel}{G(\vec r,\vec r_0)}}=0$ für $\vec r\in S$

$\Delta G=\Delta F+\underbrace{\Delta H}_{=0}=\delta$ ✓

F heißt fundamentale Lösung

Bsp: Fundamentale Lsg. für $\Delta F(\vec r,\vec r_0)=\delta(\vec r,\vec r_0)$ in 3 dim.

mit $F\xrightarrow[|\vec r|\to\infty]{}0$.

Betrachte große Sphäre, Mittelpkt $\vec r_0$, Radius $R\gg 1$

$$\int_V \Delta F(\vec r,\vec r_0)\,dV=\int_V \delta(\vec r-\vec r_0)\,dV=1 \quad \text{da } \vec r_0\in V.$$

Gauss-Satz $\shortparallel$

$$\int_S \vec\nabla F(\vec r,\vec r_0)\cdot\hat n\,dS$$

Sphärische Symmetrie: $F(\vec r,\vec r_0)=F(|\vec r-\vec r_0|)=F(\rho)$

hat also den selben Wert auf ganz S.

$$\Rightarrow \int_S \vec\nabla F(\rho)\cdot\hat n\,dS\overset{!}{=}1 \quad \text{führt zu} \quad 4\pi\rho^2\left.\frac{dF}{d\rho}\right|_{\rho=R}=1$$

$$\Rightarrow F(\rho)=-\frac{1}{4\pi\rho}+\text{const.}$$

mit $F(\rho)\xrightarrow[\rho\to\infty]{}0 \Rightarrow \text{const}=0.$ $\quad\Rightarrow \boxed{F(\vec r,\vec r_0)=-\frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{|\vec r-\vec r_0|}}$

Nun erhalten wir allg. das
elektrostat. Potential einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$:

$$\Delta u = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

für Randbed. $\underset{|\vec{r}|\to\infty}{u \to 0}$ $\quad (\rho(\vec{r}) = 0$ für $|\vec{r}| \gg 1)$

Das sind homogene Randbed $\Rightarrow$ Oberflächenintegral in $\boxed{6}$ verschwinden:

$$\Rightarrow u(\vec{r}_0) = \int_V \frac{\rho(\vec{r})}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}_0|}\, dV_{\vec{r}} \qquad V = \mathbb{R}^3.$$

Methode der Spiegelladungen

Wir nehmen an, wir haben die fund. Lsg. $F(\vec{r},\vec{r}_0)$ bestimmt.
Nun suchen wir eine Lsg. $H(\vec{r},\vec{r}_0)$, die in V die homogene Gl.
(hier: Laplace-Gl. $\Delta H = 0$) erfüllt, und mit F zusammen die
Randbed $G = F + H \equiv 0$ auf S ~~erfüllt~~ genügt.
Dies wird durch Spiegelladungen unserer fund. Ladung bei $\vec{r}_0$
an Orten außerhalb von V erreicht! Dies geht wie folgt.

(1) Zu der einzelnen fund. Quelle $\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$ innerhalb von V
addiere man Bildladungen außerhalb von V:

$$\sum_{n=1}^{N} q_n \delta(\vec{r}-\vec{r}_n) \quad , \vec{r}_n \in \mathbb{R}^d \setminus V$$

N [# Bildladungen], q_n und $\vec{r}_n$ werden in (3) festgelegt.

(2) Die fundamentalen Lsgn $F(\vec{r},\vec{r}_n)$ erfüllen alle
$\Delta F(\vec{r},\vec{r}_n) = 0$ innerhalb von V, da die $\vec{r}_n$ alle außerhalb von V
liegen. $\Rightarrow$ Ansatz

$$G(\vec{r},\vec{r}_0) = F(\vec{r},\vec{r}_0) + \sum_{n=1}^{N} q_n F(\vec{r},\vec{r}_n)$$

(3) Man stelle nun die Positionen $\vec{r}_n$ und Ladungsstärken q_n so ein,
dass $\quad G(\vec{r},\vec{r}_0)\big|_S = 0$ gilt.

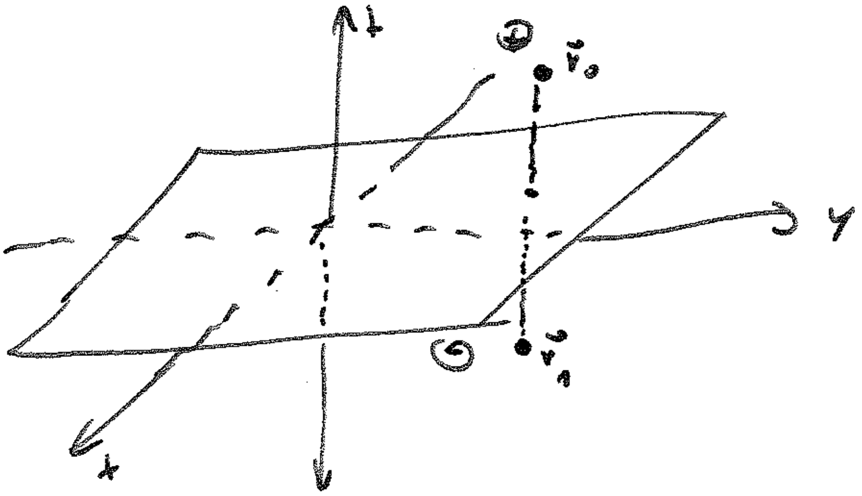
(4) Die Lsgn. der Poisson-Gl. $\Delta u = s$ mit Dirichlet-Randbed $u(\vec{r})|_S = f(\vec{r})$
ist dann gegeben durch

$$u(\vec r) = \int_V dV_{\vec r_0}\, G(\vec r,\vec r_0)\,\rho(\vec r_0) + \int_S dS_{\vec r_0}\, f(\vec r_0)\, \frac{\partial G(\vec r,\vec r_0)}{\partial n_0}$$

Im allg. ist das schwierig. Bei einfachen geometrischen Verhältnissen jedoch kann man die Lsg. tatsächlich einfach finden, in dem man Spiegelladungen so platziert, als ob der Rand S ein optischer Spiegel wäre.

Bsp: Lösung von $\Delta u = 0$ in $V = \{\underset{(x,y,z)}{\vec r} \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$, $S = \{\underset{(x,y,z)}{\vec r} \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$

unter Randbed. $u(\vec r)\big|_S = u(x,y,0) = f(\vec r) = f(x,y)$.



$\vec r_0 = (x,y,z) \Rightarrow \vec r_1 = (x,y,-z)$.

Randbed.: $G(\vec r,\vec r_0) = 0$ für $\vec r = (x,y,z=0)$ und $G(\vec r,\vec r_0) \xrightarrow[|\vec r|\to\infty]{} 0$

Eine Spiegelladung genügt.

Die Stärke der Spiegelladung ist einfach die der originalen Ladung, aber mit umgekehrtem Vorzeichen:

$$G(\vec r,\vec r_0) = -\frac{1}{4\pi|\vec r-\vec r_0|} + \frac{1}{4\pi|\vec r-\vec r_1|}$$

Da $\rho(\vec r) \equiv 0$ in V $\Rightarrow$ Lsg. der Laplace-Gl. ist

$$u(\vec r) = \int_{S_{tot}} f(\vec r_0)\, \frac{\partial G(\vec r,\vec r_0)}{\partial n_0}\, dS_{\vec r_0}$$

$$S_{tot} = \underbrace{S}_{z=0\text{-Ebene}} + S_\infty \leftarrow \text{Halbkugelschale, Radius} \to \infty$$

S_∞ liefert keinen Beitrag im Integral, da dort G und $\frac{\partial G}{\partial n} \equiv 0$ werden.

Verbleibt Integration über $(z=0)$-Ebene, also die xy-Ebene.

$\hat n = -\hat e_z$ (immer nach außen weisen!)

$$\Rightarrow \frac{\partial G(\vec r,\vec r_0)}{\partial n_0} = -\frac{\partial G(\vec r,\vec r_0)}{\partial z_0} = -\hat e_z \vec\nabla_{\vec r_0} G(\vec r,\vec r_0)$$

Man beachte nun:

$$|\vec r-\vec r_0|^2 = (\vec r-\vec r_0)\cdot(\vec r-\vec r_0)$$

$$\Rightarrow \vec\nabla|\vec r-\vec r_0|^2 = 2(\vec r-\vec r_0)$$

$$\Rightarrow \vec\nabla|\vec r-\vec r_0| = \vec\nabla\sqrt{|\vec r-\vec r_0|^2} = \frac{1}{2}\,\frac{2(\vec r-\vec r_0)}{\sqrt{|\vec r-\vec r_0|^2}} = \frac{\vec r-\vec r_0}{|\vec r-\vec r_0|}$$

$$\Rightarrow \vec\nabla G(\vec r,\vec r_0) = \frac{\vec r-\vec r_0}{4\pi|\vec r-\vec r_0|^3} - \frac{\vec r-\vec r_1}{4\pi|\vec r-\vec r_1|^3}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec r_0 = (x_0,y_0,z_0)\\ \vec r_1 = (x_0,y_0,-z_0)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$-\frac{\partial G(\vec r,\vec r_0)}{\partial z} = -\hat e_z\cdot\vec\nabla G(\vec r,\vec r_0) = -\frac{z-z_0}{4\pi|\vec r-\vec r_0|^3} + \frac{z+z_0}{4\pi|\vec r-\vec r_1|^3}$$

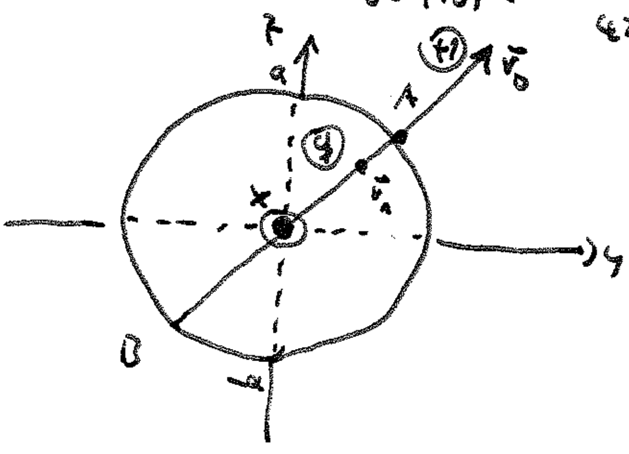
Auf der Ebene $z=0$ erhalten wir ~~...~~ also:

$$-\left.\frac{\partial G(\vec r,\vec r_0)}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{2z_0}{4\pi\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\right)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow u(x_0,y_0,z_0) = \frac{z_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dy\,\frac{f(x,y)}{\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\right)^{3/2}}$$

__Bsp:__ Lösung der Poisson-Gl. innerhalb einer Sphäre (Radius a, Mittelpunkt = Ursprung) für Dirichlet-Randbed. Bestimmung der Green'schen Fkt.

Ansatz:
$$G(\vec r,\vec r_0) = -\frac{1}{4\pi|\vec r-\vec r_0|} + \frac{q}{4\pi|\vec r-\vec r_1|}$$



$|\vec r_0|>a,\quad |\vec r_1|<a.$

$G(\vec r,\vec r_0) \xrightarrow[|\vec r|\to\infty]{} 0$ ✓

Aus Symmetriegründen liegt $\vec r_1$ auf derselben Ursprungsachse, wie $\vec r_0$.

$\Rightarrow \quad \vec r_1 = k \vec r_0, \quad k < 1.$

Dirichlet-Green's-Fkt: $G(\vec r, \vec r_0) = 0$ für $|\vec r| = a$

Unser Ansatz legt daher nahe, daß

$$|\vec r - \vec r_0| \propto |\vec r - \vec r_1| \quad \forall\, |\vec r| = a$$

gelten muss. Insb. muss das für die Pkte A und B gelten:

A: $\quad |\vec r_0| - a \quad \propto \quad a - |\vec r_1|$

B: $\quad |\vec r_0| + a \quad \propto \quad a + |\vec r_1|$

$$\Rightarrow \quad \frac{|\vec r_0| - a}{a - |\vec r_1|} = \frac{|\vec r_0| + a}{a + |\vec r_1|} . \qquad \Rightarrow \quad (a + |\vec r_1|)(|\vec r_0| - a) = (|\vec r_0| + a)(a - |\vec r_1|)$$

$$\cancel{\frac{(|\vec r_0| - a)^2}{a^2 - |\vec r_1|^2}}$$

$$\Rightarrow \quad |\vec r_0||\vec r_1| - a(|\vec r_1| - |\vec r_0|) - a^2 = -|\vec r_0||\vec r_1| - a(|\vec r_1| - |\vec r_0|) + a^2$$

$$\Rightarrow \quad 2|\vec r_0||\vec r_1| = 2a^2$$

$$\Rightarrow \quad |\vec r_1| = \frac{a^2}{|\vec r_0|}$$

$$\Rightarrow \quad \vec r_1 = \left(\frac{a^2}{|\vec r_0|^2}\right) \vec r_0$$

Man rechne nach, dass diese Position $\vec r_1$ für die Bildladung auch allgemein $|\vec r - \vec r_0| \propto |\vec r - \vec r_1| \quad \forall\, |\vec r| = a$ erfüllt.

Nun: $$|\vec r - \vec r_1|^2 = \cancel{\frac{a^4}{|\vec r_0|^2}} \left(\vec r - \frac{a^2}{|\vec r_0|^2}\vec r_0\right)\left(\vec r - \frac{a^2}{|\vec r_0|^2}\vec r_0\right)$$

$$= |\vec r|^2 - 2\frac{a^2}{|\vec r_0|^2}\,\vec r \cdot \vec r_0 + \frac{a^4}{|\vec r_0|^2}$$

$|\vec r|^2 = a^2$ auf S

$$= \frac{a^2}{|\vec r_0|^2}\Big(\underbrace{|\vec r_0|^2 - 2\vec r \cdot \vec r_0 + a^2}_{|\vec r - \vec r_0|}\Big) \quad \text{für } |\vec r| = a$$

$$\Rightarrow \quad |\vec r - \vec r_1| = \frac{a^2}{|\vec r_0|^2} |\vec r - \vec r_0| \quad \forall\, |\vec r| = a$$

Um nun $G|_S = 0$ zu erhalten, muss also

die Ladung $q = -\frac{a}{|\vec{r}_0|}$ sein:

$$G(\vec{r},\vec{r}_0) = -\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|} + \frac{q}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_1|}$$

$$= -\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|} + \frac{q}{4\pi\left|\vec{r}-\frac{a^2}{|\vec{r}_0|^2}\vec{r}_0\right|}$$

$$G|_S = -\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|} + \frac{q}{4\pi\left(\frac{a}{|\vec{r}_0|}\right)|\vec{r}-\vec{r}_0|} \quad \text{für } |\vec{r}| = a$$

$$\stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \boxed{q = -\frac{a}{|\vec{r}_0|}}$$

$$G(\vec{r},\vec{r}_0) = \frac{-1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|} + \frac{a/|\vec{r}_0|}{4\pi\left(\vec{r}-\left(a/|\vec{r}_0|\right)^2\vec{r}_0\right)}$$

<u>Bem.:</u> Lösung für Poisson-Gl. innerhalb der Sphäre ganz analog,
aber $|\vec{r}|, |\vec{r}_0| < a$ (innerhalb der Sphäre),
$|\vec{r}_1| > a$ (außerhalb der Sphäre).