

Einführung in die Quantentheorie

Hausübung, Blatt 5

SoSe 2024

Abgabe: 05.05.2024

[H12] Zerfließen eines Gaußschen Wellenpakets I (4 Punkte)

Die Wellenfunktion eines freien Teilchens mit der Masse m in einer Dimension sei zur Zeit $t = 0$ bekannt als

$$\psi(x, t=0) = (\sigma\pi)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(ik_0x - \frac{x^2}{2\sigma}\right),$$

wobei k_0 und σ positive reelle Konstanten sind.

- Berechnen Sie $\psi(x, t)$, indem Sie nach Eigenzuständen des Hamiltonoperators $H = \frac{P^2}{2m}$ entwickeln.
- Bestimmen Sie das Maximum $(x_{\max}, w(x_{\max}))$ der Wahrscheinlichkeitsdichte $w(x)$ als Funktion der Zeit.
- Geben Sie die Breite Δ des durch die Wahrscheinlichkeitsdichte definierten Wellenpakets zur Zeit t an.
- Diskutieren Sie die Ergebnisse aus (b) und (c) für $t \rightarrow \infty$.

[H13] Unschärfen eines Gaußschen Wellenpakets (4 Punkte)

Für $k_0 = 0$ reduziert sich die zeitabhängige Wellenfunktion aus [H12] auf

$$\psi(x, t) = \left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} (\eta(t))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\eta(t)}\right) \quad \text{mit} \quad \eta(t) = \sigma + i\hbar t/m.$$

Stimmt Ihr Resultat für [H12a]? Berechnen Sie als Funktion der Zeit

- $\langle X \rangle$, $\langle X^2 \rangle$ und ΔX ,
- $\langle P \rangle$, $\langle P^2 \rangle$ und ΔP .
- Geben Sie $\Delta P \Delta X$ als Funktion der Zeit an. Bestimmen Sie das Minimum.

[H14] Zerfließen eines Gaußschen Wellenpakets II (2 Punkte)

Für $k_0 = 0$ vereinfacht sich die Anfangs-Wellenfunktion aus [H12] zu

$$\psi(x, t=0) = (\sigma\pi)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma}\right).$$

Die Zeitentwicklung $\psi(x, t)$ soll alternativ bestimmt werden mit Hilfe von

$$\langle x|U(t)|y \rangle = \langle x|e^{-\frac{i}{\hbar}tH}|y \rangle = \delta(x-y) \exp\left(\frac{i\hbar t}{2m} \partial_y^2\right).$$

Benutzen Sie hierzu die Identität

$$e^{\frac{1}{2}\alpha \partial_z^2} e^{-\frac{1}{2}z^2} = (1+\alpha)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}z^2/(1+\alpha)}.$$

2 Sonderpunkte:

Können Sie diese Identität beweisen, indem Sie eine Differentialgleichung für die linke Seite herleiten und diese lösen?