

Einführung in die Quantentheorie

Präsenzübung, Blatt 7

SoSe 2024

14./15.05.2024

[P19] Wahrscheinlichkeitsstrom

- (a) Die Wellenfunktion eines freien Teilchens mit der Masse m sei für $t = 0$ durch

$$\langle x|\psi\rangle = a \exp(ik_1x) + b \exp(ik_2x)$$

gegeben. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte und die Wahrscheinlichkeitsstromdichte als Funktion der Zeit. Verifizieren Sie die Stromerhaltung.

- (b) Zeigen Sie, dass allgemein gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx j(x) = \frac{\langle P \rangle}{m}.$$

[P20] Quantisierung im Phasenraum

Jeder Funktion $f(q, p)$ im klassischen Phasenraum läßt sich im Hilbertraum eindeutig ein Operator F zuordnen durch die sogenannte Weyl-Ordnungs-Vorschrift

$$F = \text{symmetrische Ordnung von } f(q \rightarrow Q, p \rightarrow P) \quad \text{mit} \quad [Q, P] = i\hbar \mathbf{1}; \quad (1)$$

z.B. wird $f = q^2p$ zu $F = \frac{1}{3}(Q^2P + QPQ + PQ^2)$. Die (ebenfalls eindeutige) Umkehrung liefert für jeden Hilbertraum-Operator G (als Funktion der Operatoren Q und P) eine Phasenraum-Funktion

$$g_{\hbar}(q, p) = G_{\star}(Q \rightarrow q, P \rightarrow p), \quad (2)$$

wobei die Funktion $G_{\star}(q, p)$ aus der Funktion $G(q, p)$ dadurch entsteht, dass Produkte aus q und p mit dem neuen (nichtkommutativen Stern-)Produkt

$$q \star q = q^2, \quad q \star p = qp + \frac{i\hbar}{2}, \quad p \star q = pq - \frac{i\hbar}{2}, \quad p \star p = p^2 \quad (3)$$

zu bilden sind. Seine assoziative Erweiterung auf beliebige Funktionen lautet

$$(f \star g)(q, p) = f(q, p) \exp\left\{\frac{i\hbar}{2} (\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q)\right\} g(q, p). \quad (4)$$

An die Abhängigkeit von \hbar erinnert in (2) die Notation g_{\hbar} .

- (a) Entwickeln Sie das Stern-Produkt bis zur Ordnung \hbar^2 und identifizieren Sie die Ordnung \hbar . Welche Ordnungen sind symmetrisch oder antisymmetrisch?
- (b) Verifizieren Sie mit (4) oder dem Ergebnis zu (a) die Produkte in (3).
- (c) Prüfen Sie am Beispiel $f = q^2p$, ob (2) tatsächlich die Umkehrung von (1) ist, d.h. ob die \hbar -Abhängigkeit herausfällt in $f \rightarrow F \rightarrow f_{\hbar} = f$.
- (d) Welches ist die zum Hamilton-Operator $H = \frac{p^2}{2m} + V(Q)$ gehörige Phasenraum-Funktion $h_{\hbar}(q, p)$? Gilt $h_{\hbar} = h \equiv \frac{p^2}{2m} + V(q)$?
- (e) Bilden Sie für eine Observable F die Heisenbergsche Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} F = \frac{1}{i\hbar} [F, H] \quad (\partial_t F = 0)$$

via (2) auf den Phasenraum ab. Wie lautet der klassische Beitrag ($\hbar \rightarrow 0$), wie die führende Quantenkorrektur, falls $H = \frac{p^2}{2m} + V(Q)$ und $f_{\hbar} = f$?

- (f) Können Sie die Lösung $f_{\hbar}(t)$ mit einer „Zeitentwicklungsfunktion“ angeben?