Kürzester Weg

Bekanntermaßen ist eine Gerade die kürzeste Verbindung zweier Punkte in der Ebene. Um dies zu beweisen, parametrisieren wir ebene Kurven C von $(0,0)$ bis (a,b) als Funktionsgraphen, also $y=f(x)$ mit $f(0)=0$ und $f(a)=b$, und minimieren deren Längenfunktional $L[f]$.

(a) Drücken Sie die Bogenlänge $L=\int_C \mathrm{d}s=\int_C\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}f)^2}=\int_0^a \mathrm{d}x\ (\ldots)$ durch f aus, um das Längenfunktional zu bestimmen.

(b) Entwickeln Sie $L[\bar f+\eta]$ mit $\eta(0)=0=\eta(a)$ bis zur linearen Ordnung (in η, η', η'', ...).

(c) Wo nötig, integrieren Sie partiell, um $\delta L[\bar f,\eta]$ in die Form $\int_0^a \mathrm{d}x\ \frac{\delta L}{\delta f(x)}[\bar f]\ \eta(x)$ zu bringen.

(d) Aus dem Verschwinden der Variation für alle η folgt für $f(x)$ die Differenzialgleichung $\frac{\delta L}{\delta f(x)}=0$. Bestimmen Sie deren Lösung $\bar f(x)$ für die gegebenen Randwerte. Eine Gerade?

Variation mit Nebenbedingung

Für differenzierbare quadratintegrable Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ soll das folgende Funktional (aus der Vorlesung) minimiert werden:

$$U[f]\ =\ \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\ \{f'(x)^2+x^2 f(x)^2\}}{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\ f(x)^2}\ .$$

Wegen $U[\alpha f]=U[f]$ ist mit einer Lösung $\bar f$ auch jedes Vielfache $\alpha\bar f$ mit $\alpha>0$ eine Lösung der Variationsgleichung $\delta U[\bar f,\eta]=0\ \forall\eta$. Somit können wir aus jeder Lösungsschar $\{\alpha\bar f\}$ das normierte Mitglied auswählen, oder gleich $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\, f(x)^2=1$ fordern. Damit ist die Aufgabe umformuliert in die Minimierung von

$$W[f]\ =\ \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\ \{f'(x)^2+x^2 f(x)^2\}\qquad \text{mit Nebenbedingung}\quad N[f]\ :=\ \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\ f(x)^2-1\ =\ 0\,.$$

Wenden Sie nun die Lagrange-Multiplikator-Methode an und setzen die erste Variation des Funktionals $U[f,\lambda]:=W[f]-\lambda\,N[f]$ zu Null. Dies liefert neben der Nebenbedingung eine Differenzialgleichung für f, die Sie als Eigenwertgleichung lesen können mit Lösungen $\bar f_\lambda(x)$.

Die Nebenbedingung $N[\bar f_\lambda]=0$ sollte nun λ festlegen, tut dies hier aber nur indirekt: Man kann zeigen, dass im vorliegenden Fall die Normierbarkeit von $\bar f_\lambda$ unendlich viele, aber diskrete Eigenwerte $\lambda=\lambda_n\equiv 2n{+}1$ mit $n=0,1,2,\ldots$ zulässt. Die zugehörigen Lösungsfunktionen sind $\bar f_n(x)\sim H_n(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$, wobei H_n das n-te Hermite-Polynom bezeichnet. Bestimmen Sie die zugehörigen (lokalen) Minimumswerte $U[\bar f_n]$, indem Sie einmal partiell integrieren und die Eigenwertgleichung verwenden.

Bemerkung: In der Quantenmechanik ist $f{=}\psi$ die Ortswellenfunktion des harmonischen Oszillators (mit Frequenz $\omega{=}1$), und $U[f]=\frac{\hbar}{2}E[\psi]$ berechnet den Erwartungswert der Energie E im Oszillator-Zustand $|\psi\rangle$.