F=1-Stukturen und potentielle Endlichkeit von Yang-Mills-Theorien

Diplomarbeit am Institut für Theoretische Physik
der Universität Hannover

von

Thorsten Struckmann

Oktober 1995

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

In der störungstheoretischen Berechnung von n-Punkt-Funktionen in Quantenfeldtheorien ergeben sich für bestimmte Feynmangraphen höherer Ordnung Divergenzen aus Integrationen über freie Loop-Impulse. Um mit dieser Methode die endlichen Meßgrößen, wie Massen, Streuquerschnitte etc. zu erhalten, müssen diese Divergenzen entfernt, die Theorie 'renormiert' werden. Die Grundidee der Renormierung besteht in der Voraussetzung von divergenten, 'nackten', physikalischen Parametern, die jedoch nicht gemessen werden können. Die Divergenzen dieser Parameter sind so gewählt, daß sie in der Summe mit den UV-Divergenzen einer unendlichen Reihe von Feynmangraphen aus der Loop-Entwicklung auf die endlichen, meßbaren Parameter führen. Die Renormierungstheorie ist nun eine endliche Anzahl von Redefinitionen und Vorschriften, mit der man die Theorie in jeder Ordnung endlich machen kann. Die Vorgehensweise besteht darin, zuerst durch 'power counting', d.h. durch Abzählen der Exponenten der zu integrierenden Impulse, den naiven Divergenzgrad aller Feynmangraphen der Theorie zu bestimmen und dann die divergenten Integrale durch Einführung eines Regularisierungsverfahren (z.B Impulscutoff, dimensionale Regularisierung) formal endlich und dadurch handhabbar zu machen. Der nächste Schritt ist nun im BPHZ-Verfahren die rekursive Hinzufügung (in jeder Ordnung der Störungsreihe) von divergenten 'Countertermen' zur Lagrangedichte, die die divergenten Diagramme 'heraussubtrahieren' und die Theorie in der betrachteten Ordnung endlich machen. Eine Theorie ist renormierbar, wenn man nur eine endliche Zahl von verschiedenen Countertermstrukturen, die nicht notwendigerweise den Termen in der ursprünglichen Lagrangedichte entsprechen müssen, benötigt. Wenn man die unendliche Reihe von Countertermen zusammenfassen kann und diese dieselben Strukturen wie die Terme in der ursprünglichen Lagrangedichte haben, so ist das Verfahren äquivalent zur multiplikativen Renormierung, d.h. zur Abspaltung der Divergenzen durch divergente Faktoren in der Lagrangedichte. Der letzte Schritt

ist nun der induktive Beweis der Renormierbarkeit in $n+1$. Ordnung aus der Renormierbarkeit in n. Ordnung.
Man unterscheidet 4 verschiedene Klassen von Theorien: nichtrenormierbare Theorien, renormierbare Theorien, superrenormierbare Theorien und endliche Theorien. Superrenormierbare Theorien sind hier Theorien mit Graphen, deren Divergenzgrade mit zunehmender Loop-Ordnung abnehmen, d.h. mit einer endlichen Anzahl von divergenten Graphen und endliche Theorien weisen überhaupt keine Divergenzen auf. Ausgangspunkt dieser Arbeit sind spontan gebrochene Yang-Mills-Theorien, deren Renormierbarkeit von 't Hooft gezeigt wurde.
Die Renormierungsvorschriften machen die Einführung einer Massenskala notwendig, da die Verbindung zu den meßbaren Größen durch Definition der renormierten Größen bei einem bestimmten Impulsübertrag, dem Subtraktionspunkt, erfolgen muß. In der dimensionalen Regularisierung ist ein Massenparameter nötig, um die richtige Dimension der renormierten Parameter zu erhalten. Die meßbaren physikalischen Parameter dürfen natürlich keine Abhängigkeit von der Wahl des Subtraktionspunktes zeigen. Dies führt auf die Renormierungsgruppe, unter der man die Halbgruppe der Transformationen zwischen verschiedenen Renormierungsbedingungen, unter denen die meßbaren Größen invariant bleiben, versteht. Diese Invarianz führt auf die Renormierungsgruppengleichung, die den Effekt einer Skalenänderung (des Renormierungspunktes) auf die Theorie beschreibt. Die Kopplungen zeigen eine Abhängigkeit vom Massenskalenparameter μ, die durch die jeweiligen β-Funktionen beschrieben wird; man spricht von 'laufenden Kopplungskonstanten' (siehe auch [?], [?]).
Renormierbare GUT's weisen als größtes Problem das Hierarchieproblem, das Mischen der beiden Massenskalen der Theorien (der GUT-Skala M_X und der elektroschwachen Skala M_W mit $M_X/M_W \approx 10^{12}$) durch Strahlungskorrekturen, d.h. durch Renormierungseffekte, auf. Dieses Problem wird vermieden durch die Betrachtung endlicher Quantenfeldtheorien, deren berechnete physikalische Größen nach Abschalten der Regularisierung einen endlichen Grenzwert besitzen. Diese können eventuell Hinweise auf tieferliegende Symmetrien geben, wenn man davon ausgeht, daß Symmetrien sich in den Renormierungskonstanten widerspiegeln. Eine endliche Theorie erhält man, wenn sich die Divergenzen aller Graphen am betrachteten Propagator oder Vertex gegenseitig kompensieren. Dies ist in einigen supersymmetrischen Theorien der Fall, wo sich die Divergenzen der bosonischen und fermionischen Loops in allen Ordnungen der Störungstheorie kompensieren. Supersymmetrische Theorien erfordern für jedes Fermion/Boson einen Partner, der der jeweils anderen Statistik gehorcht. Da von diesen Teilchen (noch?) keines entdeckt wurde, ist es naheliegend, nach nichtsupersymmetrischen endlichen Theorien zu suchen. Notwendige Bedingung für die Endlichkeit einer Theorie ist das Verschwinden

der Betafunktionen bis zur betrachteten Ordnung in der Störungstheorie, woraus bestimmte Endlichkeitskriterien abgeleitet wurden ($F = 1$) [?], [?].
In dieser Arbeit wird von einer allgemeinen, masselosen Eichfeldtheorie ausgegangen. Die Masselosigkeit ist eine sinnvolle Näherung im Hochenergielimes, erleichtert die Rechnungen und führt auf die Betrachtung von Weyl-Fermionen. Es werden folgende Aspekte der Renormierung einer solchen Theorie behandelt:

- Die Berechnung von 1-Loop-β-Funktionen für die Eich-, Yukawa- und Skalarkopplungen, sowie die Zuordnungen der einzelnen Betafunktionsbeiträge zu ihren entsprechenden Feynman-Graphen.
- Der Zusammenhang zwischen den $F = 1$-Strukturen und den Beiträgen der Feynman-Graphen.
- Der Einfluss von Quantengravitationstermen (Weyl-Gravitation) auf die Beschreibung des Renormierungsgruppenflusses durch Potentiale.
- Eine spezielle Lösung des F=1-Systems für die Yukawakopplungen.

Kapitel 2

β-Funktionen

2.1 Renormierungsgruppe und β-Funktionen

In einer multiplikativ renormierbaren Theorie besteht folgender Zusammenhang zwischen der unrenormierten n-Punkt-Vertexfunktion Γ_B^n und den renormierten Γ^n:

$$\Gamma_B^n = Z(R)\Gamma_R^n \tag{2.1}$$

$Z(R)$ ist hier eine in einem bestimmten Renormierungsschema R ausgewertete divergente Renormierungsfunktion und Γ_B^n als unrenormierte Größe davon unabhängig. Für die renormierte Größe in einem anderen Renormierungsschema R' ergibt sich dieselbe Gleichung mit $R \to R'$. Man erhält so die Transformationen zwischen den renormierten Größen zu

$$\Gamma_{R'}^n = \frac{Z(R)}{Z(R')}\Gamma_R^n \equiv Z(R', R)\Gamma_R^n. \tag{2.2}$$

Für diese Transformationsfunktionen gibt es also eine Gruppenmultiplikation und das Einselement

$$Z(R'', R')Z(R', R) = Z(R'', R) \quad Z(R, R) = 1. \tag{2.3}$$

Sie bilden also die Renormierungs(-Halb)-Gruppe. Die Transformationen zwischen den Renormierungsschemen bewirken das Verschieben eines endlichen Beitrags zwischen der divergenten Renormierungsfunktion Z und der endlichen renormierten n-Punkt-Vertexfunktion, die an einem Subtraktionspunkt $p^2 = \mu^2$ (mit Impulsübertrag p^2) definiert ist. Das Renormierungsschema wird also durch die Wahl der Massenskala μ spezifiziert: $\Gamma_R \equiv \Gamma_\mu$. Die Abhängigkeit dieser Größen von der Massenskala wird in der Renormierungsgruppengleichung beschrieben. Diese folgt daraus, daß Γ_B als nackte Größe unabhängig vom Subtraktionspunkt sein muß:

$$\mu \frac{d}{d\mu} \Gamma_B(p, g_i, m_j, \mu) = 0 \tag{2.4}$$

Dies führt mit der Kettenregel auf die Renormierungsgruppengleichung

$$[\mu \frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(g_i)\frac{\partial}{\partial g_i} + \mu \frac{\partial m_j}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial m_j} + \gamma(g)]\Gamma_\mu(p, g_i, m_j, \mu) = 0 \tag{2.5}$$

mit einer Summation über die Kopplungen g_i und Massen m_j, sowie

$$\beta(g_i) \equiv \mu \frac{\partial g_i}{\partial\mu}, \quad \gamma(g) \equiv \mu \frac{\partial}{\partial\mu} ln(Z_\mu) \tag{2.6}$$

Die Renormierungsgruppengleichung zeigt, daß die Änderung der Massenskala durch die Änderungen der anderen Parameter wie Massen und Kopplungen ausgeglichen werden muß, um die erforderliche Invarianz der beobachtbaren Größen unter den Renormierungsgruppentransformationen, d.h. deren Unabhängigkeit vom gewählten Renormierungsschema, zu befriedigen. Die β-Funktion der Renormierungsgruppe beschreibt die Abhängigkeit der Kopplungen von der Massenskala. Sie gibt gleichfalls die Änderung der 'laufenden Kopplunskonstante' $\bar{g}(g,t)$ mit der Anfangsbedingung $\bar{g}(g,0) = g$ unter einer Skalierung der äußeren Impulse $p \to e^t p$ am Vertex an.

$$\frac{d\bar{g}(g,t)}{dt} = \beta(\bar{g}). \tag{2.7}$$

Zur Berechnung der β-Funktionen, die sich (s.u.) aus den Polen erster Ordnung im Parameter der dimensionalen Regularisierung (Integration in d Dimensionen) $\epsilon = 4 - d$ der Vertex-Renormierungsfunktionen ergeben, ist die Auswertung von ein-Teilchen-irreduziblen (1PI) Diagrammen am Vertex und an den äußeren Beinen (Wellenfunktionsrenormierung) nötig. In einer multiplikativ renormierbaren Theorie mit Eichfeldern A^a_μ, Skalarfeldern ϕ^α und Fermionfeldern ψ_i mit Darstellungsmatrizen T^a_F, T^a_B der Eichgruppe G, sowie der Eichkopplung g, den Yukawakopplungen Y^α_{ij} und den Skalarkopplungen $V^{\alpha\beta\gamma\delta}$ erhält man

$$\begin{aligned}
A^a_{\mu B} &= Z^A_{ab} A^b_\mu, &(2.8)\\
\phi^\alpha_B &= Z^\phi_{\alpha\beta}\phi^\beta, &(2.9)\\
\psi_{iB} &= Z^\psi_{ij}\psi_j, &(2.10)\\
Y^\alpha_{ijB} &= Z^{Y\ \alpha\beta}_{ij,mn} Y^\beta_{mn}, &(2.11)\\
V^{\alpha\beta\gamma\delta}_B &= Z^V_{\alpha\beta\gamma\delta,\epsilon\lambda\mu\nu} V^{\epsilon\lambda\mu\nu}, &(2.12)\\
T^a_{Fij} g_B &= Z^g_{ij,mn}(T^a_F g)_{mn}. &(2.13)
\end{aligned}$$

Die letzte Beziehung gilt für den Fermion-Eichboson-Vertex. Man berechnet jedoch $Z^g_{ij,mn} = Z^g \delta_{im}\delta_{jn}$, und die Eichkopplungsrenormierung, unabhängig von den fermionischen und eichbosonischen Indizes ist:

$$g_B = Z^g g. \tag{2.14}$$

Die Wellenfunktionsrenormierungsfunktionen Z^A, Z^ϕ und Z^ψ errechnet man aus

$$Z^W = \sqrt{\hat{Z}^W} \quad (W = A, \psi, \phi), \tag{2.15}$$

wobei $\hat{Z}^W$ die Propagatorrenormierungsfunktion ist, sich also direkt aus den Propagatorlooprechnungen ergibt. Da in den Propagator das Produkt zweier Wellenfunktionsterme eingeht, folgt obige Beziehung zwischen den Renormierungsfunktionen. Die Renormierungsfunktionen Z^g, Z^Y und Z^V ergeben sich aus dem Produkt von Funktionen $\bar{Z}_i$, die direkt aus den Loops am betrachteten Vertex resultieren, und den Inversen der Renormierungsfunktionen der Wellenfunktionen an den äußeren Beinen:

$$g_B(T^a_F)_{ij} = \sum_{b,m,n} \frac{\bar{Z}^{g\ ab}_{ij,mn}}{Z^A_{ab} Z^\psi_{im} Z^\psi_{jn}} g(T^b_F)_{mn}, \tag{2.16}$$

$$Y^\alpha_{ijB} = \sum_{\beta,m,n} \frac{\bar{Z}^{Y\ \alpha\beta}_{ij,mn}}{Z^\phi_{\alpha\beta} Z^\psi_{im} Z^\psi_{jn}} Y^\beta_{mn}, \tag{2.17}$$

$$V^{\alpha\beta\gamma\delta}_B = \sum_{\epsilon,\lambda,\mu,\nu} \frac{\bar{Z}^V_{\alpha\beta\gamma\delta,\epsilon\lambda\mu\nu}}{Z^\phi_{\alpha\epsilon} Z^\phi_{\beta\lambda} Z^\phi_{\gamma\mu} Z^\phi_{\delta\nu}} V^{\epsilon\lambda\mu\nu}. \tag{2.18}$$

Im folgenden wird die Renormierung im MS-Schema in dimensionaler Regularisierung der divergenten Integrale betrachtet, in der lediglich die Pole in ϵ in die Renormierungsfunktion aufgenommen werden. Mit dem Faktor $\mu^{w_i\epsilon}$, der in der dimensionalen Regularisierung nötig ist, um die Dimensionslosigkeit von g_{iB} zu erhalten, besteht nun folgender Zusammenhang zwischen der nackten Kopplung g_{iB} und der renormierten Kopplung g_i:

$$g_{iB} = \mu^{w_i\epsilon}(g_i + \sum_{n=1}^{\infty} Z^{(n)}_i(g)\frac{1}{\epsilon^n}). \tag{2.19}$$

Die Unendlichkeiten der nackten Größen stecken hier in der Laurent-Reihe in ϵ. Die Parameter w_i sind aus Dimensionsgründen notwendig und betragen $\frac{1}{2}$ für die Eich- und Yukawakopplungen, sowie 1 für die Skalarkopplungen. Da g_{iB} unabhängig vom Renormierungspunkt ist, erhält man aus der Differentiation der Gleichung nach $\ln\mu$

$$0 = w_i\epsilon(g_i + \sum_{n=1}^{\infty} Z^{(n)}_i(g)\frac{1}{\epsilon^n}) + \mu\frac{dg_i}{d\mu} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_l \mu\frac{dg_l}{d\mu}\frac{\partial Z^{(n)}_i}{\partial g_l}\frac{1}{\epsilon^n} \tag{2.20}$$

mit einer Summe über die Kopplungen g_l. Hier ist $\mu\frac{dg_i}{d\mu}$ mit dem Grenzwert $\beta(g_i) = \mu\frac{dg_i}{d\mu}|_{\epsilon=0}$ analytisch in $\epsilon = 0$, läßt sich also als Taylorreihe $\mu\frac{dg_i}{d\mu}(\epsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} i_r \epsilon^r$ schreiben. Aus obiger Gleichung ergibt sich, daß die Koeffizienten der verschiedenen Ordnungen in ϵ verschwinden müssen. Dies führt auf (Koeffizienten von ϵ^k):

$$0 = w_i Z_i^{(1)} + i_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_l l_n \frac{\partial Z_i^{(n)}}{\partial g_l} \quad (k=0), \tag{2.21}$$

$$0 = w_i g_i + i_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_l l_{n+1} \frac{\partial Z_i^{(n)}}{\partial g_l} \quad (k=1), \tag{2.22}$$

$$0 = w_i Z_i^{(-k+1)} + \sum_{n=-k}^{\infty} \sum_l l_{n+k} \frac{\partial Z_i^{(n)}}{\partial g_l} \quad (k<0), \tag{2.23}$$

$$0 = i_k + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_l l_{n+k} \frac{\partial Z_i^{(n)}}{\partial g_l} \quad (k>1). \tag{2.24}$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich $i_k = l_k = 0$ für $k > 1$. Hieraus folgt unmittelbar $i_1 = -w_i g_i$, $\mu\frac{dg_i}{d\mu} = \beta(g_i) - w_i g_i \epsilon$ und

$$i_0 = \beta(g_i) = \sum_l w_l g_l \frac{\partial Z_i^{(1)}}{\partial g_l} - w_i Z_i^{(1)}(g). \tag{2.25}$$

Für die hier betrachteten Kopplungen gilt demnach insbesondere (Hier werden nur die $Z_i^{(1)}$-Terme mit nichttrivialer Abhängigkeit vom jeweiligen Differentiationsparameter berücksichtigt, womit ein Ergebnis der unten aufgeführten Rechnungen schon vorweggenommen wird.):

$$\beta(g) = \frac{1}{2} g \frac{\partial Z_g^{(1)}}{\partial g} - \frac{1}{2} Z_g^{(1)}(g), \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}\beta(Y) = {} & \frac{1}{2}\Big(g \frac{\partial Z_Y^{(1)}}{\partial g} + \sum_{\delta,k,l} Y_{kl}^{\delta} \frac{\partial Z_Y^{(1)}}{\partial Y_{kl}^{\delta}} \\ & + \sum_{\delta,k,l} Y_{kl}^{\delta *} \frac{\partial Z_Y^{(1)}}{\partial Y_{kl}^{\delta *}} - Z_Y^{(1)}(g,Y)\Big),\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}\beta(V) = {} & \frac{1}{2} g \frac{\partial Z_V^{(1)}}{\partial g} + \sum_{\delta,k,l} \frac{1}{2} Y_{kl}^{\delta} \frac{\partial Z_V^{(1)}}{\partial Y_{kl}^{\delta}} + \sum_{\delta,k,l} \frac{1}{2} Y_{kl}^{\delta *} \frac{\partial Z_V^{(1)}}{\partial Y_{kl}^{\delta *}} \\ & + \sum_{\lambda,\rho,\mu,\nu} V^{\lambda\rho\mu\nu} \frac{\partial Z_V^{(1)}}{\partial V^{\lambda\rho\mu\nu}} - Z_V^{(1)}(g,Y,V).\end{aligned} \tag{2.28}$$

2.2 Lagrangedichte und Feynmanregeln

Wir betrachten eine allgemeine, ,masselose, renormierbare Eichtheorie mit reellen Skalarfeldern ϕ_α, Weyl-Spinoren ψ_i, Eichfeldern A^a_μ und der Lagrangedichte (analog zu [?, ?])

$$\begin{aligned} L &= -1/4 F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + i\bar{\psi}_i \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi_i + 1/2 D_\mu \phi_\alpha D^\mu \phi_\alpha \\ &\quad -1/2 \psi_i \psi_j Y^\alpha_{ij} \phi_\alpha - 1/2 \bar{\psi}_i \bar{\psi}_j Y^{\alpha *}_{ij} \phi_\alpha - 1/24 V_{\alpha\beta\gamma\delta} \phi_\alpha \phi_\beta \phi_\gamma \phi_\delta \\ &\quad +(\text{Eichfixierung+Geistterme}). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Üblich sind Berechnungen mit Majorana- oder Weyl-Fermionen. Ich ziehe in der dimensionalen Regularisierung die Weyl-Fermionen-Schreibweise vor, da hier im Gegensatz zur Majorana-Formulierung problematische γ_5-Terme nicht explizit auftreten. Implizit setzen Weyl-Fermionen aber natürlich die Existenz eines γ_5-Analogons in n Dimensionen voraus [?]. Die Skalar- und Spinorfelder transformieren unter Darstellunge R_F und R_B (hermitesche Matrizen als Generatoren T_F,T_B) der Eichgruppe G mit Strukturkonstanten f^{abc} . Die kovarianten Ableitungen D_μ und die Yang-Mills-Feldstärke $F^a_{\mu\nu}$ haben die Form

$$\begin{aligned} F^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu, && (2.30) \\ D_\mu \phi_\alpha &= \partial_\mu \phi_\alpha - ig T^a_{B\alpha\beta} A^a_\mu \phi_\beta, && (2.31) \\ D_\mu \psi_i &= \partial_\mu \psi_i - ig T^a_{Fij} A^a_\mu \psi_j. && (2.32) \end{aligned}$$

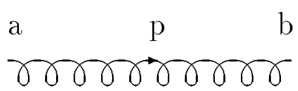
Die T_B sind antisymmetrisch, die Yukawa-Kopplungsmatrizen $Y^\alpha = Y^\alpha_{ij}$ und die Skalarkopplungen $V_{\alpha\beta\gamma\delta}$ sind vollkommen symmetrisch unter Vertauschungen der unteren Indizes. Aus der Eichinvarianz der Lagrangedichte folgen die Bedingungen (in Matrixnotation)

$$\begin{aligned} 0 &= Y^\alpha T^a_F + T^{aT}_F Y^\alpha + Y^\beta T^a_{B\beta\alpha}, && (2.33) \\ 0 &= V_{\alpha\beta\gamma\epsilon} T^a_{B\epsilon\delta} + V_{\alpha\beta\epsilon\delta} T^a_{B\epsilon\gamma} + V_{\alpha\epsilon\gamma\delta} T^a_{B\epsilon\beta} + V_{\epsilon\beta\gamma\delta} T^a_{B\epsilon\alpha}. && (2.34) \end{aligned}$$

Aus der Lagrangedichte lassen sich folgende Feynmanregeln im Impulsraum (in R_ξ-Eichung mit Eichparameter α) für die masselose Theorie ablesen: (Impulse: k, p, q, r; Lorentzindizes: μ, ν, ρ, σ; fermionische Indizes: i, j; Skalarindizes: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; Eichbosonindizes: a, b, c, d; Spinorindizes: μ, ν, ρ)

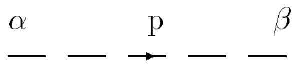
<u>Propagatoren</u>

Geister:



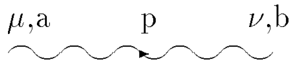
$$i \frac{\delta_{ab}}{p^2 + i\epsilon} \tag{2.35}$$

Skalare:



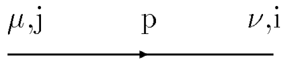
$$i\frac{\delta_{\alpha\beta}}{p^2+i\epsilon} \tag{2.36}$$

Eichbosonen:



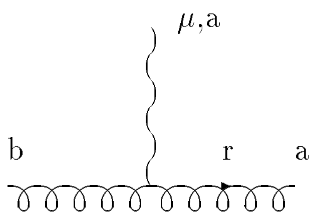
$$-i\delta_{ab}\frac{g_{\mu\nu}-(1-\alpha)p_\mu p_\nu/p^2}{p^2+i\epsilon} \tag{2.37}$$

Fermionen:



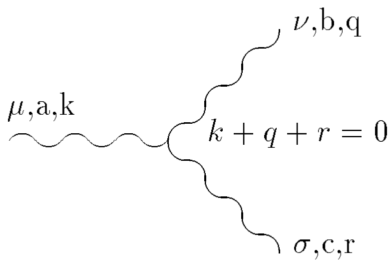
$$i\delta_{ij}\left(\frac{p_\rho\sigma^\rho}{p^2+i\epsilon}\right)_{\nu\mu} \tag{2.38}$$

<u>Vertizes</u>
Geist-Vertex:



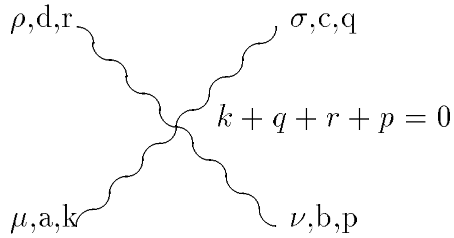
$$gf_{abc}r_\mu \tag{2.39}$$

3-Eichboson-Vertex:



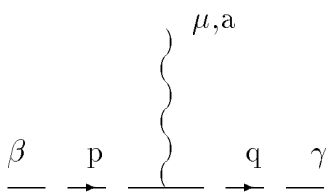
$$igf_{abc}[g_{\mu\nu}(k-q)_\sigma+g_{\nu\sigma}(q-r)_\mu+g_{\sigma\mu}(r-k)_\nu] \tag{2.40}$$

4-Eichboson-Vertex:



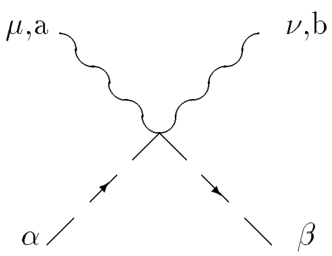
$$\begin{aligned} &ig^2[f_{abe}f_{cde}(g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} \\ &+f_{ace}f_{bde}(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} \\ &+f_{ade}f_{cbe}(g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}] \end{aligned} \tag{2.41}$$

Skalar-Eichboson-Vertex 1:



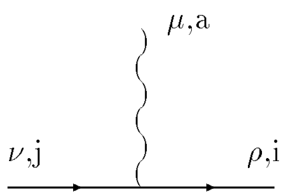
$$ig(p+q)_\mu (T_B^a)_{\gamma\beta} \tag{2.42}$$

Skalar-Eichboson-Vertex 2:



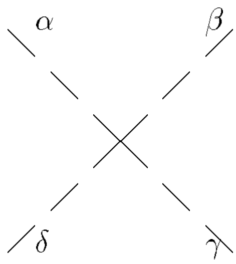
$$-ig^2 g_{\mu\nu}\{T_B^a, T_B^b\}_{\beta\alpha} \tag{2.43}$$

Fermion-Eichboson-Vertex:



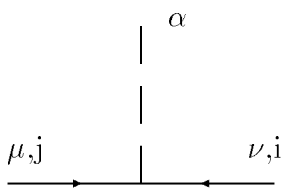
$$ig(\bar{\sigma}^\mu)_{\rho\nu}(T_F^a)_{ij} \tag{2.44}$$

Skalarkopplung:



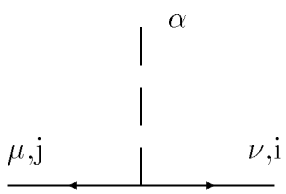
$$-iV_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{2.45}$$

Yukawa-Kopplung 1:



$$-i\epsilon_{\nu\mu}Y^{\alpha}_{ij} \tag{2.46}$$

Yukawa-Kopplung 2:



$$-i\epsilon^{\nu\mu}Y^{\alpha}_{ij} \tag{2.47}$$

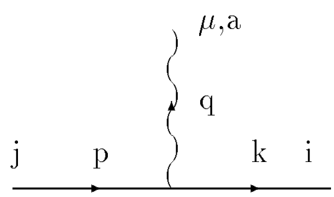
Bei den Yukawakopplungen ist wegen der Antisymmetrie in den Raum-Zeit-Indizes die ‘Fermionenreihenfolge’ zu beachten.

2.3 Beiträge zu den β-Funktionen

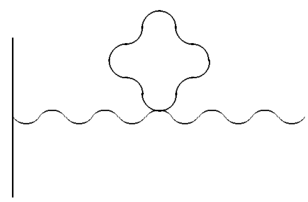
β-Funktionen von allgemeinen Eichtheorien wurden in [?] für Dirac-Fermionen und in [?] für Weyl-Fermionen angegeben. Da der jeweilige Beitrag jedes hierfür benötigten Feynman-Diagramms von späterem Interesse ist, werden diese hier berechnet und einzeln aufgeführt. Die folgenden Beiträge zu den β-Funktionen wurden in R_ξ-Eichung mit freiem Eichparameter α und dimensionaler Regularisierung berechnet. Die Ein-Loop-β-Funktionen sollten unabhängig von der Eichung und damit von α sein, was zugleich ein kleiner Test für die Ergebnisse ist. Spezialfälle sind hier die Feynman-Eichung ($\alpha = 1$) in der der Eichbosonpropagator eine einfache Form hat und die Landau-Eichung ($\alpha = 0$), in der einige Graphen einen niedrigeren Divergenzgrad aufweisen. Die Zwei-Loop-Beiträge zur Eich-β-Funktion wurden in [?] in Hintergrundfeldeichung (einer speziellen Eichung, in der Looprechnungen bei einem festen äußeren Hintergrundfeld betrachtet werden [?]) berechnet und werden hier nicht einzeln aufgeführt. Die unten aufgeführten Terme tauchen mit dem Faktor $\frac{1}{(4\pi)^2\epsilon}$ unmittelbar in den jeweiligen β-Funktionen auf. Insbesondere stellen die Beiträge der Propagatorenloops hier den mit dem Faktor $-\frac{1}{2}$ (aus der Entwicklung von $(Z^W)^{-1} = (\hat{Z}^W)^{-1/2}$ in niedrigster Ordnung ϵ) multiplizierten divergenten Anteil der Diagrammberechnung dar.

2.3.1 Beiträge zu β(g)

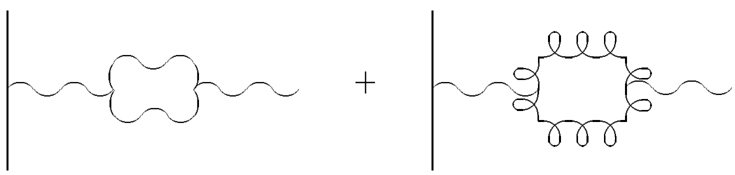
Die Beiträge in (??) ergeben sich aus den Diagrammen:
(I) *Definierender Vertex* :



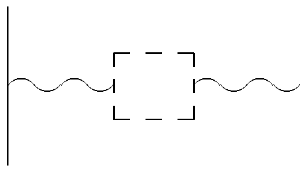
(IAa) *kein Beitrag*



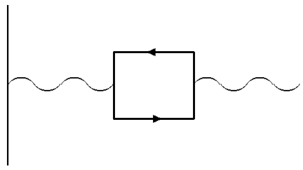
(IA(b+c)) $-g^3 c_g(\frac{13}{6} - \frac{1}{2}\alpha)T_F^a$



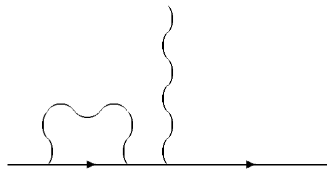
(IAd) $+g^3 \frac{2}{3} S_F T_F^a$



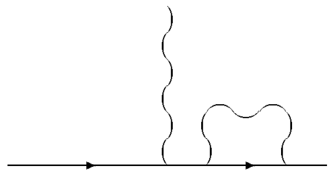
(IAe) $+g^3 \frac{1}{6} S_B T_F^a$



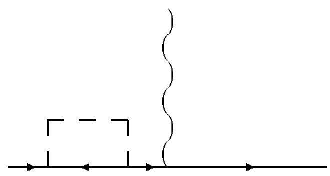
(IBa) $+g^3 \alpha T_F^a C_F$



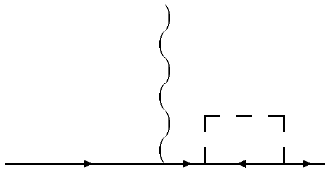
(IBb) $+g^3 \alpha C_F T_F^a$



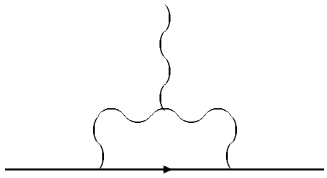
(IBc) $+g \frac{1}{2} T_F^a Y^{\beta *} Y^{\beta}$



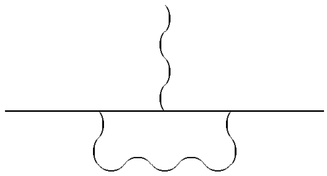
(IBd) $+g\frac{1}{2}Y^{\beta *}Y^{\beta}T_F^a$



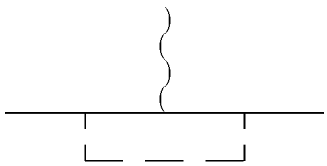
(ICa) $-g^3\frac{3}{2}c_g(1+\alpha)T_F^a$



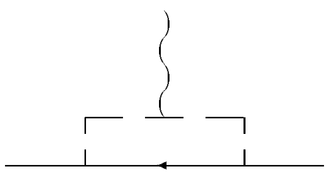
(ICb) $-g^3\alpha(-c_g+C_F T_F^a+T_F^a C_F)$



(ICc) $+g(Y^{\beta *}T_F^a Y^{\beta})^T$

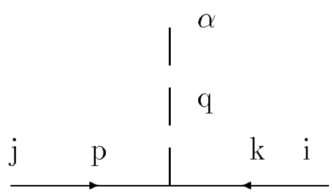


(ICd) $-g\frac{1}{2}(T_F^a Y^{\beta *}Y^{\beta}+Y^{\beta *}Y^{\beta}T_F^a+2(Y^{\beta *}T_F^a Y^{\beta})^T)$

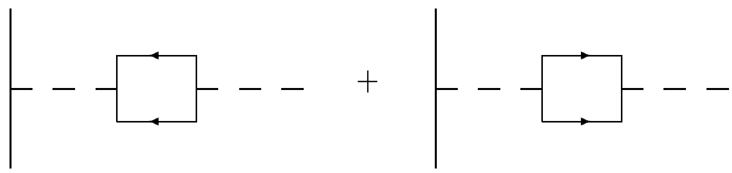


2.3.2 Beiträge zu β(Y)

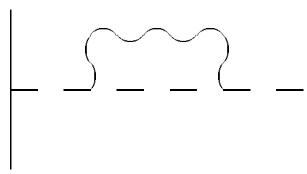
Die Beiträge in (**??**) ergeben sich aus den Diagrammen:
(II) $Definierender\ Vertex:$



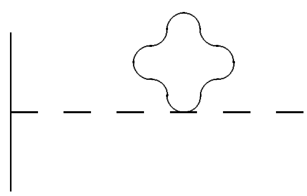
(IIA(a+b)) $+\frac{1}{2}Y^{\beta}Sp(Y^{\alpha\dagger}Y^{\beta}+Y^{\beta\dagger}Y^{\alpha})$



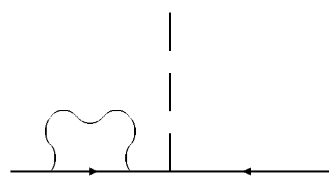
(IIAc) $+g^2(\alpha-3)[C_F^TY^{\alpha}+Y^{\alpha}C_F+2(T_F^{aT}Y^{\alpha}T_F^a)]$



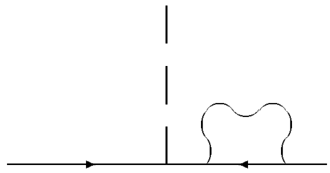
(IIAd) $kein Beitrag$



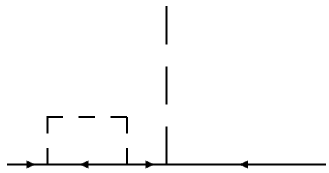
(IIBa) $+g^2\alpha Y^{\alpha}C_F$



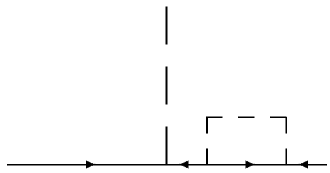
(IIBb) $+g^2 \alpha C_F^T Y^\alpha$



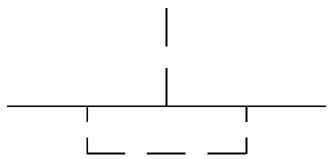
(IIBc) $+\frac{1}{2} Y^\alpha Y^{\beta\dagger} Y^\beta$



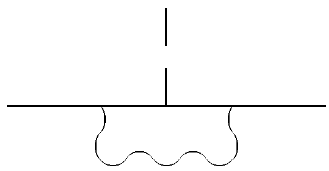
(IIBd) $+\frac{1}{2} Y^\beta Y^{\beta\dagger} Y^\alpha$



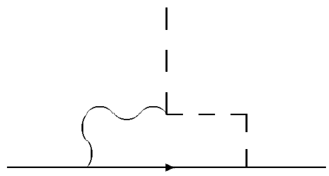
(IICa) $2 Y^\beta Y^{\alpha\dagger} Y^\beta$



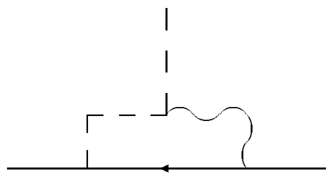
(IICb) $+g^2(6+2\alpha)(T_F^{aT} Y^\alpha T_F^a)$



(IICc) $-g^2 2\alpha[Y^\alpha C_F + T_F^{aT} Y^\alpha T_F^a]$

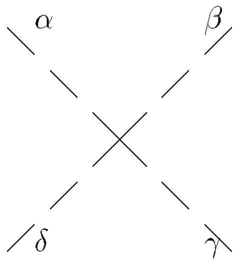


(IICd) $-g^2 2\alpha[C_F^T Y^\alpha + T_F^{aT} Y^\alpha T_F^a]$

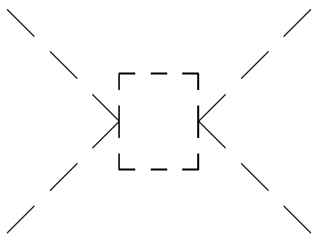


2.3.3 Beiträge zu β(V)

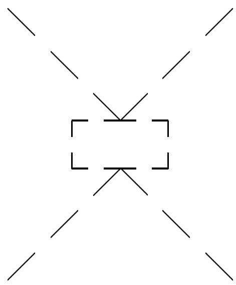
Die Beiträge ergeben sich in (**??**) aus den Diagrammen:
(III) *Definierender Vertex* :



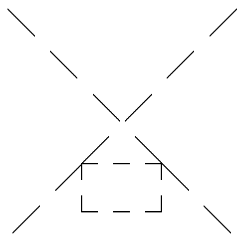
(IIIa) $V_{\alpha\delta\mu\nu} V_{\beta\gamma\mu\nu}$



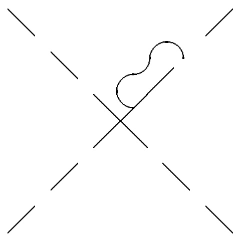
(IIIb) $V_{\alpha\beta\mu\nu}V_{\delta\gamma\mu\nu}$



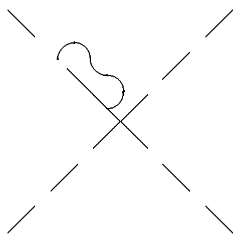
(IIIc) $V_{\alpha\gamma\mu\nu}V_{\beta\delta\mu\nu}$



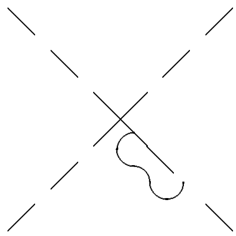
(IIId) $g^2(\alpha-3)C_{B\beta\lambda}V_{\alpha\lambda\gamma\delta}$



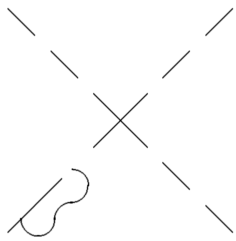
(IIIe) $g^2(\alpha-3)C_{B\alpha\lambda}V_{\lambda\beta\gamma\delta}$



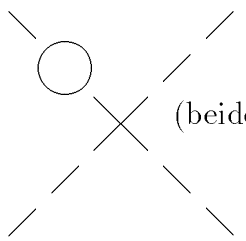
(IIIf) $g^2(\alpha-3)C_{B\gamma\lambda}V_{\alpha\beta\lambda\delta}$



(IIIg) $g^2(\alpha-3)C_{B\delta\lambda}V_{\alpha\beta\gamma\lambda}$

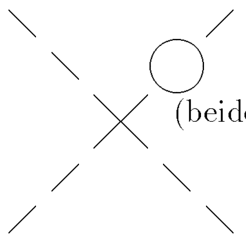


(IIIh) $\frac{1}{2}Sp(Y^{\alpha\dagger}Y^{\lambda}+Y^{\lambda\dagger}Y^{\alpha})V_{\lambda\beta\gamma\delta}$



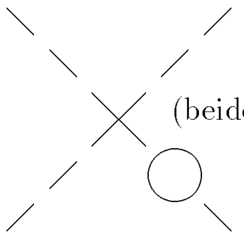
(beide Fermionrichtungen)

(IIIi) $\frac{1}{2}Sp(Y^{\beta\dagger}Y^{\lambda}+Y^{\lambda\dagger}Y^{\beta})V_{\alpha\lambda\gamma\delta}$



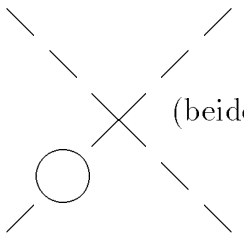
(beide Fermionrichtungen)

(IIIj) $\frac{1}{2}Sp(Y^{\gamma\dagger}Y^{\lambda}+Y^{\lambda\dagger}Y^{\gamma})V_{\alpha\beta\lambda\delta}$



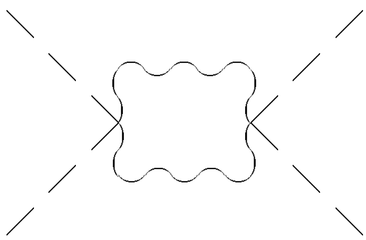
(beide Fermionrichtungen)

(IIIk) $\frac{1}{2}Sp(Y^{\delta\dagger}Y^{\lambda}+Y^{\lambda\dagger}Y^{\delta})V_{\alpha\beta\gamma\lambda}$

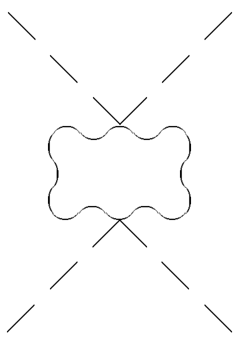


(beide Fermionrichtungen)

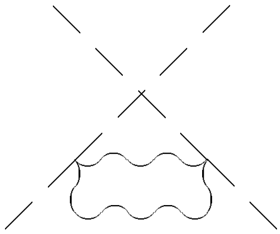
(IIIl) $g^4(\alpha^2+3)\{T_B^a,T_B^b\}_{\alpha\delta}\{T_B^a,T_B^b\}_{\beta\gamma}$



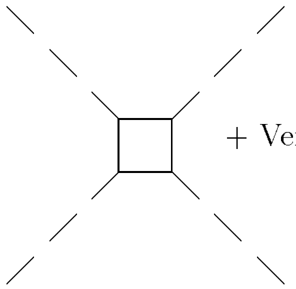
(IIIm) $g^4(\alpha^2+3)\{T_B^a,T_B^b\}_{\alpha\beta}\{T_B^a,T_B^b\}_{\gamma\delta}$



(IIIn) $g^4(\alpha^2+3)\{T^a_B,T^b_B\}_{\alpha\gamma}\{T^a_B,T^b_B\}_{\beta\delta}$

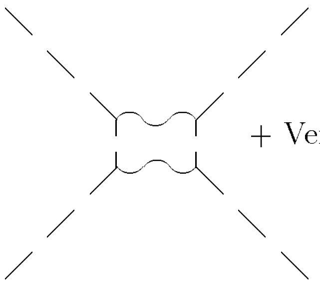


(IIIo) $-2Sp[(Y^\alpha Y^{\delta\dagger}+Y^\delta Y^{\alpha\dagger})(Y^\beta Y^{\gamma\dagger}+Y^\gamma Y^{\beta\dagger})+(Y^\alpha Y^{\beta\dagger}+Y^\beta Y^{\alpha\dagger})$
$(Y^\delta Y^{\gamma\dagger}+Y^\gamma Y^{\delta\dagger})+(Y^\alpha Y^{\gamma\dagger}+Y^\gamma Y^{\alpha\dagger})(Y^\delta Y^{\beta\dagger}+Y^\beta Y^{\delta\dagger})]$



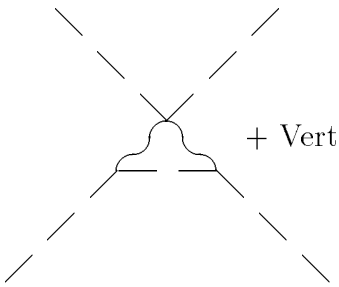
+ Vertauschungen

(IIIp) $-\alpha^2 g^4[(T^a_BT^b_B)_{\alpha\delta}(T^a_BT^b_B)_{\beta\gamma}+(T^a_BT^b_B)_{\alpha\beta}(T^a_BT^b_B)_{\gamma\delta}+(T^a_BT^b_B)_{\alpha\gamma}(T^a_BT^b_B)_{\beta\delta}+$
$(T^a_BT^b_B)_{\delta\alpha}(T^a_BT^b_B)_{\beta\gamma}+(T^a_BT^b_B)_{\beta\alpha}(T^a_BT^b_B)_{\gamma\delta}+(T^a_BT^b_B)_{\gamma\alpha}(T^a_BT^b_B)_{\beta\delta}]$



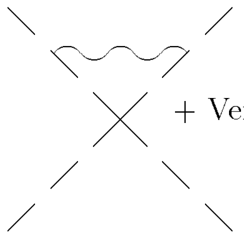
+ Vertauschungen

(IIIq) $-\alpha^2 g^4[\{T^a_BT^b_B\}_{\alpha\delta}(T^b_BT^b_B)_{\beta\gamma}+\{T^a_BT^b_B\}_{\alpha\gamma}(T^b_BT^b_B)_{\delta\beta}+$
$\{T^a_BT^b_B\}_{\alpha\delta}(T^b_BT^b_B)_{\gamma\beta}]$

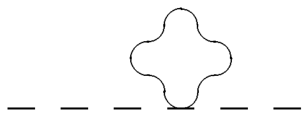


+ Vertauschungen

(IIIr) $+2\alpha g^2[T^a_{B\epsilon\alpha}T^a_{B\tau\beta}V_{\epsilon\tau\gamma\delta} + T^a_{B\epsilon\alpha}T^a_{B\tau\gamma}V_{\epsilon\tau\beta\delta} + T^a_{B\epsilon\alpha}T^a_{B\tau\delta}V_{\epsilon\tau\beta\gamma}$
$+T^a_{B\epsilon\beta}T^a_{B\tau\gamma}V_{\epsilon\tau\alpha\delta} + T^a_{B\epsilon\beta}T^a_{B\tau\delta}V_{\epsilon\tau\alpha\gamma} + T^a_{B\epsilon\gamma}T^a_{B\tau\delta}V_{\epsilon\tau\alpha\beta}]$


+ Vertauschungen

(IIIs) $kein Beitrag$



2.3.4 β-Funktionen

Hier ist $C = T^aT^a$ der quadratische Casimiroperator, d_g die Dimension von G, $S = \frac{1}{d_g}Sp(C)$ der Dynkin-Index , $Q = \frac{1}{d_g}SpC^2$ und c_g der Casimir-Eigenwert der adjungierten Darstellung. Die aus der Eichinvarianz folgenden Bedingungen an Kopplungen und Darstellungsmatrizen wurden ausgenutzt, um verschiedene Terme in andere Strukturen umzuformen, wie z.B. den Term ICd:

$$(Y^{\beta *}Y^{\alpha})_{ij}(T^a_B)_{\beta\alpha} = -\frac{1}{2}(T^a_F Y^{\beta *}Y^{\beta} + Y^{\beta *}Y^{\beta}T^a_F + 2(Y^{\beta *}T^a_F Y^{\beta})^T). \tag{2.48}$$

Die β-Funktionen ergeben sich zu:

$$\beta(g) = \mu\frac{dg}{d\mu} = -\frac{g^3}{6(4\pi)^2}(22c_g - 4S_F - S_B), \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned}\beta(Y^{\alpha}) \quad = \quad & \frac{1}{2(4\pi)^2}[4Y^{\beta}Y^{\alpha\dagger}Y^{\beta} + Y^{\alpha}Y^{\beta\dagger}Y^{\beta} + Y^{\beta}Y^{\beta\dagger}Y^{\alpha} \\ & +Y^{\beta}Tr(Y^{\alpha\dagger}Y^{\beta} + Y^{\beta\dagger}Y^{\alpha}) - 6g^2(Y^{\alpha}C_F + C_F Y^{\alpha})],\end{aligned} \tag{2.50}$$

(Matrixnotation für fermionische Indizes) und

$$\begin{aligned}(4\pi)^2\beta(V_{\alpha\beta\gamma\delta}) \quad = \quad & V_{\alpha\beta\lambda\epsilon}V_{\lambda\epsilon\gamma\delta} + V_{\alpha\gamma\lambda\epsilon}V_{\beta\delta\lambda\epsilon} + V_{\alpha\delta\lambda\epsilon}V_{\beta\gamma\lambda\epsilon} \\ & +[1/2Sp(Y^{\alpha\dagger}Y^{\lambda} + Y^{\lambda\dagger}Y^{\alpha}) - 3g^2C^{\alpha\lambda}_B]V_{\lambda\beta\gamma\delta}\end{aligned} \tag{2.51}$$

$$
\begin{aligned}
&+[1/2Sp(Y^{\beta\dagger}Y^{\lambda}+Y^{\lambda\dagger}Y^{\beta})-3g^2C_B^{\beta\lambda}]V_{\alpha\lambda\gamma\delta}\\
&+[1/2Sp(Y^{\gamma\dagger}Y^{\lambda}+Y^{\lambda\dagger}Y^{\gamma})-3g^2C_B^{\gamma\lambda}]V_{\alpha\beta\lambda\delta}\\
&+[1/2Sp(Y^{\delta\dagger}Y^{\lambda}+Y^{\lambda\dagger}Y^{\delta})-3g^2C_B^{\delta\lambda}]V_{\alpha\beta\gamma\lambda}\\
&+3g^4(\{T_B^a,T_B^b\}^{\alpha\beta}\{T_B^a,T_B^b\}^{\gamma\delta}\\
&+\{T_B^a,T_B^b\}^{\alpha\gamma}\{T_B^a,T_B^b\}^{\beta\delta}+\{T_B^a,T_B^b\}^{\alpha\delta}\{T_B^a,T_B^b\}^{\beta\gamma})\\
&-2Sp[(Y^{\alpha\dagger}Y^{\beta}+Y^{\beta\dagger}Y^{\alpha})(Y^{\gamma\dagger}Y^{\delta}+Y^{\delta\dagger}Y^{\gamma})\\
&(Y^{\alpha\dagger}Y^{\gamma}+Y^{\gamma\dagger}Y^{\alpha})(Y^{\beta\dagger}Y^{\delta}+Y^{\delta\dagger}Y^{\beta})\\
&(Y^{\alpha\dagger}Y^{\delta}+Y^{\delta\dagger}Y^{\alpha})(Y^{\beta\dagger}Y^{\gamma}+Y^{\gamma\dagger}Y^{\beta})]
\end{aligned}
$$

in 1-Loop-Ordnung und

$$
\begin{aligned}
\beta(g) &= \beta(g,\text{1-Loop})-\frac{g^3}{(4\pi)^4 d_g}Tr(C_F Y^{\beta\dagger}Y^{\beta}) \\
&+\frac{g^5}{3(4\pi)^4}[6Q_F+6Q_B+c_g(10S_F+S_B-34c_g)]
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

in 2-Loop-Ordnung.

2.4 β-Funktionen im Potentialmodell

Der durch die β-Funktionen beschriebene 'Renormierungsgruppenfluß' kann als 'Gradient' von Potentialen der jeweiligen Kopplungen dargestellt werden [?]. Um die asymptotischen Eigenschaften der Kopplungen zusammenhängend analysieren zu können, betrachtet man deren Entwicklung relativ zur Eichkopplung g. Hierzu führt man neue Variable $G=(g/4\pi)^2$, $y=Y/g$ und $v=V/g^2$ ein. So ergeben sich für diese die Renormierungsgruppenfunktionen:

$$
\begin{aligned}
\frac{dG}{dt} &= -\lambda G^2-\frac{2G^3}{3}(\frac{3}{d_g}Sp(C_F y^{\beta\dagger}y^{\beta})-6Q_F-6Q_B \\
&-c_g[10S_F+S_B-34c_g])+O(G^4)
\end{aligned}
\tag{2.53}
$$

mit

$$
\lambda=(22c_g-4S_F-S_B)/3, \tag{2.54}
$$

(in niedrigster Ordnung folgt dann $G(t)=\frac{1}{G_0^{-1}+\lambda t}$)

$$
\begin{aligned}
\frac{dy^{\alpha}}{dt} &= \frac{G}{2}[4y^{\beta}y^{\alpha\dagger}y^{\beta}+y^{\alpha}y^{\beta\dagger}y^{\beta}+y^{\beta}y^{\beta\dagger}y^{\alpha} \\
&+y^{\beta}Sp(y^{\alpha\dagger}y^{\beta}+y^{\beta\dagger}y^{\alpha})-(y^{\alpha}D+Dy^{\alpha})]+O(G^2)
\end{aligned}
\tag{2.55}
$$

mit

$$D_{ij} = (6C_F)_{ij} - \frac{\lambda}{2}\delta_{ij}, \tag{2.56}$$

und

$$\begin{aligned} G^{-1}\frac{dv_{\alpha\beta\gamma\delta}}{dt} = \; & v_{\alpha\beta\lambda\epsilon}v_{\lambda\epsilon\gamma\delta} + v_{\alpha\gamma\lambda\epsilon}v_{\beta\delta\lambda\epsilon} + v_{\alpha\delta\lambda\epsilon}v_{\beta\gamma\lambda\epsilon} \\ & +[1/2Sp(y^{\alpha\dagger}y^{\lambda} + y^{\lambda\dagger}y^{\alpha}) + \frac{\lambda}{4}\delta^{\alpha\lambda} - 3C_B^{\alpha\lambda}]v_{\lambda\beta\gamma\delta} \\ & +[1/2Sp(y^{\beta\dagger}y^{\lambda} + y^{\lambda\dagger}y^{\beta}) + \frac{\lambda}{4}\delta^{\beta\lambda} - 3C_B^{\beta\lambda}]v_{\alpha\lambda\gamma\delta} \\ & +[1/2Sp(y^{\gamma\dagger}y^{\lambda} + y^{\lambda\dagger}y^{\gamma}) + \frac{\lambda}{4}\delta^{\gamma\lambda} - 3C_B^{\gamma\lambda}]v_{\alpha\beta\lambda\delta} \\ & +[1/2Sp(y^{\delta\dagger}y^{\lambda} + y^{\lambda\dagger}y^{\delta}) + \frac{\lambda}{4}\delta^{\delta\lambda} - 3C_B^{\delta\lambda}]y_{\alpha\beta\gamma\lambda} \\ & +3(\{T_B^a, T_B^b\}^{\alpha\beta}\{T_B^a, T_B^b\}^{\gamma\delta} + \{T_B^a, T_B^b\}^{\alpha\gamma} \\ & \{T_B^a, T_B^b\}^{\beta\delta} + \{T_B^a, T_B^b\}^{\alpha\delta}\{T_B^a, T_B^b\}^{\beta\gamma}) \\ & -2Sp[(y^{\alpha\dagger}y^{\beta} + y^{\beta\dagger}y^{\alpha})(y^{\gamma\dagger}y^{\delta} + y^{\delta\dagger}y^{\gamma}) \\ & (y^{\alpha\dagger}y^{\gamma} + y^{\gamma\dagger}y^{\alpha})(y^{\beta\dagger}y^{\delta} + y^{\delta\dagger}y^{\beta}) \\ & (y^{\alpha\dagger}y^{\delta} + y^{\delta\dagger}y^{\alpha})(y^{\beta\dagger}y^{\gamma} + y^{\gamma\dagger}y^{\beta})] + O(G). \end{aligned} \tag{2.57}$$

Geht man zu einem neuen Entwicklungsparameter τ durch

$$d\tau = \frac{G}{2}dt \quad (\tau_0 = 0) \tag{2.58}$$

mit

$$G(\tau) = G_0 e^{-2\lambda\tau} \quad (\lambda \neq 0) \tag{2.59}$$

über, so kann man ein Potential für die Yukawakopplungen in niedrigster Ordnung in G angeben:

$$U_y = \frac{1}{3}\sum_{ijkl}|S_{ijkl}|^2 + \sum_{\alpha\beta}(I^{\alpha\beta})^2 + \sum_{ij}|M_{ij}|^2 \tag{2.60}$$

mit

$$S_{ijkl} = y_{ij}^{\alpha}y_{kl}^{\alpha} + y_{ik}^{\alpha}y_{jl}^{\alpha} + y_{il}^{\alpha}y_{jk}^{\alpha}, \tag{2.61}$$

$$I^{\alpha\beta} = Im(Sp(y^{\alpha\dagger}y^{\beta})), \tag{2.62}$$

$$M = y^{\alpha\dagger}y^{\alpha} - D. \tag{2.63}$$

Diese Terme und damit der y-Fluß sind unabhängig von v. In der Betrachtung des v-Potentials kann man also in niedrigster Ordnung von einem Fixpunkt

$y = y_{FP}$ ausgehen. In niedrigster Ordnung in G erhält man dann:

$$\begin{aligned} U_v \;=\; & v_{\alpha\beta\gamma\delta}v_{\gamma\delta\lambda\epsilon}v_{\lambda\epsilon\alpha\delta} \\ & +2[1/2Sp(y^{\alpha\dagger}y^{\lambda}+y^{\lambda\dagger}y^{\alpha})+\frac{\lambda}{4}\delta^{\alpha\lambda}-3C_B^{\alpha\lambda}]v_{\alpha\beta\gamma\delta}v_{\lambda\beta\gamma\delta} \\ & +[3(\{T_B^a,T_B^b\}^{\alpha\beta}\{T_B^a,T_B^b\}^{\gamma\delta}+\{T_B^a,T_B^b\}^{\alpha\gamma}\{T_B^a,T_B^b\}^{\beta\delta} \\ & +\{T_B^a,T_B^b\}^{\alpha\delta}\{T_B^a,T_B^b\}^{\beta\gamma})-2Sp((y^{\alpha\dagger}y^{\beta}+y^{\beta\dagger}y^{\alpha})(y^{\gamma\dagger}y^{\delta}+y^{\delta\dagger}y^{\gamma}) \\ & +(y^{\alpha\dagger}y^{\gamma}+y^{\gamma\dagger}y^{\alpha})(y^{\beta\dagger}y^{\delta}+y^{\delta\dagger}y^{\beta})(y^{\alpha\dagger}y^{\delta}+y^{\delta\dagger}y^{\alpha})* \\ & *(y^{\beta\dagger}y^{\gamma}+y^{\gamma\dagger}y^{\beta}))]v_{\alpha\beta\gamma\delta}. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Die Renormierungsgruppenfunktionen folgen aus den Potentialen mit

$$\frac{2}{G}\frac{dy_{ij}^{\alpha}}{dt}=\frac{dy_{ij}^{\alpha}}{d\tau}=\frac{\partial U_y}{\partial y_{ij}^{\alpha\dagger}}, \tag{2.65}$$

und

$$\frac{1}{G}\frac{dv^{\alpha\beta\gamma\delta}}{dt}=\frac{1}{2}\frac{dv^{\alpha\beta\gamma\delta}}{d\tau}=\frac{\partial U_v}{\partial v^{\alpha\beta\gamma\delta}}. \tag{2.66}$$

Ausgehend von diesen Potentialen lassen sich Aussagen über deren Extrema, d.h. über die Fixpunkte der jeweiligen Kopplungskonstanten machen. (Es wird geprüft, ob Extrema vorhanden sind und wie diese gegebenenfalls bei festgehaltenen anderen Kopplungen angenähert werden.) Dies ist im Zusammenhang mit Quantengravitationsbeiträgen Gegenstand von Kapitel 4. Allgemein folgt aus dem Verhalten von G(t), daß die Störungsrechnung im Fall $\lambda < 0$ nur für $\tau \to -\infty$ und im Fall $\lambda > 0$ nur für $\tau \to +\infty$ gültig bleibt.

Kapitel 3

Äquivalenz von Feynman-Graphen

3.1 Herleitung der $F = 1$-Strukturen

Die in diesem Abschnitt betrachteten Strukturen wurden zuerst in [?] beschrieben und werden hier auf eine andere Weise hergeleitet. Wir interessieren uns nun für das Verschwinden der β-Funktionen der Yukawa- und (in beiden Ordnungen) der Eichkopplung.
Aus der Multiplikation von $(4\pi)^2\beta(Y^\alpha_{ij}) = 0$ mit $Y^{\alpha\dagger}_{ij}$ und Bildung der Spur ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= 2Sp(Y^{\alpha\dagger}Y^\beta Y^{\alpha\dagger}Y^\beta) + Sp(Y^{\alpha\dagger}Y^\alpha Y^{\beta\dagger}Y^\beta) + Sp(Y^{\alpha\dagger}Y^\beta)^2 \\ &\quad + Sp(Y^{\alpha\dagger}Y^\beta)Sp(Y^{\beta\dagger}Y^\alpha) - 6g^2 Sp(C_F Y^{\alpha\dagger}Y^\alpha). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Definiert man analog zum Potentialmodell (mit der Ersetzung $y \to Y$ und $\lambda = 0$ aus dem Verschwinden der Ein-Loop-Eichbetafunktion) ein Potential $U(Y)$

$$\begin{aligned} U &= 2Sp(Y^{\alpha\dagger}Y^\beta Y^{\alpha\dagger}Y^\beta) + Sp(Y^{\alpha\dagger}Y^\alpha Y^{\beta\dagger}Y^\beta) \\ &\quad + Sp(Y^{\alpha\dagger}Y^\beta)^2 + Sp(Y^{\alpha\dagger}Y^\beta)Sp(Y^{\beta\dagger}Y^\alpha) \\ &\quad - 12g^2 Sp(C_F Y^{\alpha\dagger}Y^\alpha) + 36g^4 Sp(C_F^2) \\ &= \frac{1}{3}\sum_{ijkl}|S_{ijkl}|^2 + \sum_{\alpha\beta}(I^{\alpha\beta})^2 + \sum_{ij}|M_{ij}|^2 \geq 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

mit

$$S_{ijkl} = Y^\alpha_{ij}Y^\alpha_{kl} + Y^\alpha_{ik}Y^\alpha_{jl} + Y^\alpha_{il}Y^\alpha_{jk}, \tag{3.3}$$

$$I^{\alpha\beta} = Im(Sp(Y^{\alpha\dagger}Y^\beta)), \tag{3.4}$$

$$M = Y^{\alpha\dagger}Y^{\alpha} - 6g^2 C_F, \tag{3.5}$$

und subtrahiert (??), so erhält man mit $d_g Q = Sp(C^2)$

$$6g^2 d_g Q_F \geq Sp(C_F Y^{\alpha\dagger}Y^{\alpha}) \equiv \sum_{ij} |(Y^{\alpha}T_F^a)_{ij}|^2 \geq 0 \; . \tag{3.6}$$

Mit dem Verschwinden von $\beta(g)$ in erster und zweiter Ordnung erhält man

$$Sp(C_F Y^{\alpha\dagger}Y^{\alpha}) = 2d_g g^2[Q_F + Q_B + c_g(S_B - 2c_g)] \; . \tag{3.7}$$

Definiert man nun eine neue, nur vom Teilcheninhalt der Theorie abhängige Größe F^2 durch

$$F^2 \equiv \frac{Q_F + Q_B + c_g(S_B - 2c_g)}{3Q_F}, \tag{3.8}$$

so gilt mit $\beta(g) = \beta(Y) = 0$

$$0 \leq F^2 \leq 1 \; . \tag{3.9}$$

Es zeigt sich, daß viele Theorien dieses Kriterium nicht erfüllen (nach Kranner) und zusammen mit der Forderung nach der Eichinvarianz der Lösung in der Nähe von $F \approx 1$ eine Lösung praktisch unmöglich ist, wenn nicht $F = 1$ gilt [?]. In diesem Fall ist

$$6g^2 d_g Q_F = Sp(C_F Y^{\alpha\dagger}Y^{\alpha}) \;\Leftrightarrow\; U = 0 \; . \tag{3.10}$$

Das Verschwinden des Potentials ist äquivalent mit dem Verschwinden aller Summanden und den sich hieraus ergebenden $F = 1$-Strukturen:

$$M_{ij} = 0 \;\Leftrightarrow\; Y^{\alpha\dagger}Y^{\alpha} = 6g^2 C_F \; , \tag{3.11}$$

$$S_{ijkl} = 0 \;\Leftrightarrow\; Y^{\alpha}_{ij}Y^{\alpha}_{kl} + Y^{\alpha}_{ik}Y^{\alpha}_{jl} + Y^{\alpha}_{il}Y^{\alpha}_{jk} = 0 \; , \tag{3.12}$$

$$I^{\alpha\beta} = 0 \;\Leftrightarrow\; Im[Sp(Y^{\alpha\dagger}Y^{\beta})] = 0 \; . \tag{3.13}$$

Zu bemerken ist hier, daß $U = 0$ gleichbedeutend mit $U_y = 0$ ist. Die Ein- und Zwei-Loop-Endlichkeitsbedingungen der Eichbetafunktion führen also mit dem $F = 1$-Teilcheninhalt, d.h. mit

$$Q_B - 2Q_F + c_g(S_F - 2c_g) = 0 \; , \tag{3.14}$$

auf diesen Fixpunkt des y-Flusses. Diese Theorien zeigen also den Zerfall der unübersichtlichen Y^3-Endlichkeitsbedingungen in drei quadratische Gleichungen mit hoher Symmetrie . Zusätzlich liefert dieser Ausgangspunkt relativ einfache Lösungsansätze einschließlich supersymmetrischer Theorien, sodaß die Vermutung naheliegt, alle endlichen Theorien gehorchten dieser Bedingung. Obwohl die obige Betrachtung natürlich keinen Beweis für die letzte Aussage darstellt, ist sie sicherlich zusammen mit dem Verschwinden von $\beta(g)$ in erster Ordnung,

$$\lambda = 22c_g - 4S_F - S_B = 0, \tag{3.15}$$

ein guter Beginn für die Suche nach endlichen Theorien, wobei sehr starke Anforderungen an deren Teilcheninhalt bestehen.

3.2 Äquivalenz von Feynman-Graphen

Es stellt sich nun die Frage, welche Graphen mit ihren jeweiligen Beiträgen zu den β-Funktionen auf die obigen Größen $\lambda, S_{ijkl}, M_{ij}$ und $I_{\alpha\beta}$ führen. Die Rechnungen wurden in allgemeiner Eichung durchgeführt. Mit der expliziten Abhängigkeit einiger Terme vom Eichparameter α sind zwei Eichungen, in denen viele Kompensationen verschiedener Beiträge bzw. verschwindende Terme auftreten, nämlich $\alpha = 0$ ('Landau-Eichung') und $\alpha = -3$ besonders interessant. Motivation dieser Wahl der Eichungen ist die Absicht, die einzelnen Größen aus möglichst wenig Diagrammen zu erhalten.

3.2.1 Allgemeine Eichung

Die divergenten Beiträge der 1-Loop-Diagramme in allgemeiner Eichung sind (s.o.):

$$\begin{aligned}
IA_{b+c} &\longrightarrow g^3 c_g(-\frac{13}{6} + \frac{1}{2}\alpha)T_F^a && (3.16)\\
IA_d &\longrightarrow +g^3\frac{2}{3}S_F T_F^a && (3.17)\\
IA_e &\longrightarrow +g^3\frac{1}{6}S_B T_F^a && (3.18)\\
IB_a &\longrightarrow +\alpha g^3 T_F^a C_F && (3.19)\\
IB_b &\longrightarrow +\alpha g^3 C_F T_F^a && (3.20)\\
IB_c &\longrightarrow +g\frac{1}{2}T_F^a Y^{\beta *}Y^\beta && (3.21)\\
IB_d &\longrightarrow +g\frac{1}{2}Y^{\beta *}Y^\beta T_F^a && (3.22)\\
IC_a &\longrightarrow -g^3\frac{3}{2}c_g(1+\alpha)T_F^a && (3.23)\\
IC_b &\longrightarrow -\alpha g^3(-c_g + C_F T_F^a + C_F T_F^a) && (3.24)\\
IC_c &\longrightarrow +g(Y^{\beta *}T_F^a Y^\beta)^T && (3.25)\\
IC_d &\longrightarrow -g\frac{1}{2}T_F^a Y^{\beta *}Y^\beta - g\frac{1}{2}Y^{\beta *}Y^\beta T_F^a - g(Y^{\beta *}T_F^a Y^\beta)^T && (3.26)
\end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
IIA_{a+b} &\longrightarrow +\frac{1}{2}Y^{\beta}Sp(Y^{\alpha*}Y^{\beta}+Y^{\beta*}Y^{\alpha}) && (3.27)\\
IIA_{c} &\longrightarrow +(\alpha-3)g^2[C_F^TY^{\alpha}+Y^{\alpha}C_F+2(T_F^{aT}Y^{\alpha}T_F^a)] && (3.28)\\
IIB_{a} &\longrightarrow +\alpha g^2Y^{\alpha}C_F && (3.29)\\
IIB_{b} &\longrightarrow +\alpha g^2C_F^TY^{\alpha} && (3.30)\\
IIB_{c} &\longrightarrow +\frac{1}{2}Y^{\alpha}Y^{\beta*}Y^{\beta} && (3.31)\\
IIB_{d} &\longrightarrow +\frac{1}{2}Y^{\beta}Y^{\beta*}Y^{\alpha} && (3.32)\\
IIC_{a} &\longrightarrow +2Y^{\beta}Y^{\alpha*}Y^{\beta} && (3.33)\\
IIC_{b} &\longrightarrow +(2\alpha+6)g^2(T_F^{aT}Y^{\alpha}T_F^a) && (3.34)\\
IIC_{c} &\longrightarrow -2\alpha g^2[Y^{\alpha}C_F+T_F^{aT}Y^{\alpha}T_F^a] && (3.35)\\
IIC_{d} &\longrightarrow -2\alpha g^2[C_F^TY^{\alpha}+T_F^{aT}Y^{\alpha}T_F^a] && (3.36)
\end{aligned}
$$

Im folgenden gelten Gleichungen nur für die obigen divergenten Beiträge. Zuerst ist zu bemerken, daß sich in der Eichkopplungskopplungrenormierung die divergenten Beiträge der Diagramme mit einem Skalar natürlich unabhängig von der Eichfixierung kompensieren:

$$
I(B_c+B_d+C_c+C_d)=0\ . \qquad (3.37)
$$

Diese Diagramme werden in der nun folgenden Betrachtung demnach vernachlässigt.
Die restlichen Graphen in der Eichkopplungsrenormierung führen auf:

$$
I(A_{b+c}+A_d+A_e+B_a+B_b+C_a+C_b)=\frac{\lambda}{6}\ . \qquad (3.38)
$$

Die Größen S_{ijkl} und $I_{\alpha\beta}$ erscheinen ohne eichabhängige Beiträge in:

$$
\begin{aligned}
II(A_{a+b}+C_a) &= \sum_{kl}(\frac{1}{2}Y_{ij}^{\beta}Y_{kl}^{\alpha*}Y_{lk}^{\beta}+\frac{1}{2}Y_{ij}^{\beta}Y_{kl}^{\beta*}Y_{lk}^{\alpha}+2Y_{ik}^{\beta}Y_{kl}^{\alpha*}Y_{lj}^{\beta}) && (3.39)\\
&= (\sum_{kl}Y_{kl}^{\alpha*}S_{ijkl})-iY_{ij}^{\beta}I_{\alpha\beta}.
\end{aligned}
$$

Die restlichen Graphen der Yukawakopplungsrenormierung führen zu:

$$
II(A_c+B_a+B_b+B_c+B_d+C_b+C_c+C_d)=Y^{\alpha}M+M^TY^{\alpha}\ . \qquad (3.40)
$$

3.2.2 Landau-Eichung: $\alpha = 0$

In der Landau-Eichung verschwinden die Divergenzen vieler Diagramme separat:

$$IB_a = IB_b = IIB_a = IIB_b = 0 \tag{3.41}$$

(Hier verschwinden auch die endlichen Beiträge; komplexe Diagramme, die mindestens einen dieser Subgraphen enthalten, verschwinden also in dieser Eichung.) und

$$IC_b = IIC_d = IIC_d = 0\ . \tag{3.42}$$

Aus den Divergenzen der restlichen Graphen ergibt sich dann:

$$I(A_{b+c} + A_d + A_e + C_a) = \frac{\lambda}{6} \tag{3.43}$$

und

$$II(A_c + B_c + B_d + C_b) = Y^\alpha M + M^T Y^\alpha\ . \tag{3.44}$$

3.2.3 $\alpha = -3$

In dieser Eichung erhält man:

$$I(B_a + B_b + C_a + C_b) = 0 \tag{3.45}$$

und damit

$$I(A_{b+c} + A_d + A_e) = \frac{\lambda}{6}\ . \tag{3.46}$$

Die Ein-Loop-Eichbetafunktion folgt in dieser Eichung also lediglich aus der Wellenfunktionsrenormierung der Eichbosonen.
Für die Yukawa-β-Funktion findet man zusätzlich zu (**??**):

$$IIC_b = 0, \tag{3.47}$$

$$II(A_c + C_c + C_d) = 0, \tag{3.48}$$

$$II(B_a + B_c) = Y^\alpha M, \tag{3.49}$$

$$II(B_b + B_d) = M^T Y^\alpha. \tag{3.50}$$

Anhaltspunkte für sich widerspiegelnde Symmetrien kann man m. E. aus den verschiedenen Darstellungen nicht gewinnen.

Kapitel 4

Weyl-Gravitation und Potentialmodell

In diesem Kapitel wird die Auswirkung von Quantengravitationstermen des Modells der 'Weyl-Gravitation' auf den Renormierungsgruppenfluß der obigen allgemeinen Eichtheorie untersucht. Es wird zunächst die Konstruktion einer mit der Quantengravitation vereinigten, renormierbaren GUT beschrieben [**?**] und dann die veränderten β-Funktionen im Rahmen des Potentialmodells betrachtet.

4.1 GUT's und Quantengravitation

Ausgangspunkt der Konstruktion ist eine 'flache' , d.h. eine mit Minkowskimetrik $\eta_{\mu\nu}$ definierte Theorie mit der Wikung:

$$S = \int dx L(\Phi, \partial_\mu \Phi) \text{ mit } \Phi = (\phi^\alpha, \psi_i, A^a_\mu) \tag{4.1}$$

Diese Theorie soll nun in einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit (Koordinaten x^μ, Metrik $g_{\mu\nu}$ mit Signatur -2) unter der Forderung, daß die Wirkung ein invarianter Skalar unter allgemeinen kovarianten Transformationen sein soll, betrachtet werden. Hieraus ergibt sich das Modell der sogenannten 'minimalen Wechselwirkung':

$$S_0 = \int dx \sqrt{-g} L(\Phi, \nabla_\mu \Phi) \tag{4.2}$$

mit der kovarianten Ableitung ∇_μ und dem invarianten Volumenelement $dx\sqrt{-g}$ (mit $g = det(g_{\mu\nu})$). Komplexere Theorien erhält man nun, wenn man 'nichtminimale' invariante Terme, die im flachen Raum verschwinden, zur Lagrangedichte addiert und an diese folgende Forderungen stellt:

- Soviele Symmetrien der ursprünglichen Theorie wie möglich sollen erhalten bleiben.
- Es sollen keine neuen dimensionsbehafteten Parameter hinzukommen.
- Der masselose Grenzfall soll in der Theorie enthalten sein.

$$\Longrightarrow S = \int dx\sqrt{-g}(L(\Phi, \nabla_\mu \Phi) + \text{nichtminim. Ww.}) \tag{4.3}$$

Als einfachster Term für die nichtminimale Wechselwirkung mit der Gravitation unter diesen Anforderungen ergibt sich dann $1/2\xi_{ij}R\phi^i\phi^j$ mit dem Krümmungsskalar R und dem dimensionslosen Parameter ξ_{ij}. Betrachtet man nun die Renormierung obiger als im flachen Raum multiplikativ renormierbar angenommenen Theorie im externen Gravitationsfeld einschliesslich der $\xi R\phi^2$-Wechselwirkung mit möglichen Massentermen $1/2m_{\alpha\beta}\phi^\alpha\phi^\beta + 1/2M_{ij}\bar{\psi}^i\psi^j$, so findet man den allgemeinen Ausdruck für Vakuumdivergenzen (zur Berechnung von Renormierungsgegentermen wird mit der Hintergrundfeldmethode die sogenannte generalisierte Schwinger-DeWitt-Technik verwandt) in n Dimensionen. Es zeigt sich, daß im Gegensatz zur flachen Theorie, die eine leicht 'wegdefinierbare' Konstante als Vakuumdivergenz liefert, die Vakuumdivergenz im 'krummen' Raum vom äußeren Feld abhängig ist , $\Gamma^{(0)}_{div} = \Gamma^{(0)}_{div}(g_{\mu\nu})$, und deshalb ebenfalls renormiert werden muß.

$$\begin{aligned}\Gamma^{(0)}_{div} &= -\mu^{n-4}\int dx\sqrt{-g}\{C_1 m^4 + C_2 M^4 + C_3 m^2 M^4 \\ &\quad + C_4 m^2 R + C_5 M^2 R + C_6 R^2 + C_7 R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \\ &\quad + C_8 R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} + C_9 \Box R\}\end{aligned} \tag{4.4}$$

Hier erscheinen die Massenterme in Matrixnotation, der Riemann-Tensor $R^{\mu\nu\alpha\beta}$ und die divergenten C_i als Funktionen der Kopplungen g, Y, V und ξ. Im folgenden wird nun wie in den ersten Kapiteln nur die masselose Theorie betrachtet.
Um eine multiplikativ renormierbare Theorie zu erhalten, muss man also wegen obiger Gegenterme zu S_0 einen Term S_1 hinzuaddieren:

$$S = S_1 + S_0 \tag{4.5}$$

mit

$$\begin{aligned}S_1 &= \int dx\sqrt{-g}\{\Lambda_0 - \frac{1}{\kappa_0^2}R + C_{01}R^2 + C_{02}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \\ &\quad + C_{03}R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} + C_{04}\Box R\}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Hier sind die C_{0i} nackte, dimensionslose Parameter und S_1 beinhaltet die Einstein-Lagrangedichte (mit nackten Parametern):

$$L_{ART} = \Lambda_0 - \frac{1}{\kappa_0^2} R \tag{4.7}$$

Für die renormierte Größe ist $\frac{1}{\kappa^2} = \frac{G_N}{16\pi}$ mit der Newton'schen Gravitationskonstante G_N. Obwohl die Einstein-Theorie (ART) eine recht gute Übereinstimmung mit dem Experiment zeigt, ist man, da ihre Quantentheorie nicht renormierbar ist, gezwungen, von der ART abweichende Modelle mit der Einstein-Gravitation als Grenzfall zu betrachten. Die sich hieraus und aus den Renormierungstransformationen ergebende renormierte Theorie beinhaltet Terme, die quadratisch in den Krümmungstensoren bzw. -skalaren sind und wird deshalb auch als R^2-Gravitation bezeichnet. Es läßt sich zeigen, daß eine allgemeine, multiplikativ renormierbare mit Yang-Mills- A_μ^a, Spinor- ψ_i und Skalarfeldern ϕ^α wechselwirkende R^2-Theorie folgende Wirkung besitzt:

$$\begin{aligned} S \;=\; & \int dx\sqrt{-g}\{\frac{1}{\theta}C_{\mu\nu\alpha\beta}C^{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{\omega}{3\theta}R^2 - \frac{1}{\kappa^2}R + \Lambda \\ & -1/4F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + 1/2g^{\mu\nu}(D_\mu\phi)(D_\nu\phi) + 1/2\xi R\phi^2 - 1/24V\phi^4 \\ & 1/2\psi\psi Y\phi - 1/2\bar\psi\bar\psi Y^*\phi + i\bar\psi\bar\sigma^\mu D_\mu\psi + \text{Massenterme} \\ & +\gamma G + \delta\Box R\} \;, \end{aligned} \tag{4.8}$$

in Matrixnotation, mit dem Weyl-Tensor C und der Gauss-Bonnet topologischen Invariante G,

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu\alpha\beta} \;=\; & R_{\mu\nu\alpha\beta} + 1/2(g_{\mu\beta}R_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha}R_{\nu\beta} + g_{\nu\alpha}R_{\mu\beta} - g_{\nu\beta}R_{\mu\alpha}) \\ & +1/6R(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}) \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$G = 1/4R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2 \;. \tag{4.10}$$

Hier haben die Terme $\Box R$ als Oberflächenterm und die Invariante G keinen Einfluss auf die Bewegungsgleichungen. Vernachlässigt man diese beiden Terme und betrachtet die kosmologischen, Einstein- und Massenterme als Folge spontaner Symmetriebrechung einer GUT (die dimensionsbehafteten Parameter dieser Terme tragen ohnehin nicht zur Renormierung der dimensionslosen Parameter und deren Betafunktionen bei), so ergibt sich eine Spezialform, deren Renormierbarkeit bewiesen wurde

$$\begin{aligned} S \;=\; & \int dx\sqrt{-g}\{\frac{1}{\theta}C_{\mu\nu\alpha\beta}C^{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{\omega}{3\theta}R^2 - 1/4F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} \\ & +1/2g^{\mu\nu}(D_\mu\phi)(D_\nu\phi) + 1/2\xi R\phi^2 - 1/24V\phi^4 \\ & -1/2\psi\psi Y\phi - 1/2\bar\psi\bar\psi Y^*\phi + i\bar\psi\bar\sigma^\mu D_\mu\psi \end{aligned} \tag{4.11}$$

Die 'Konstanten' θ und ω beschreiben die Gravitationswechselwirkung, ξ ist der Parameter der nichtminimalen Kopplung zwischen Skalar- und Gravitationsfeldern. Diese Theorie ist multiplikativ renormierbar und asymptotisch frei, in gewöhnlicher Störungstheorie jedoch nicht unitär. Betrachtet man die R^2-Gravitation als Näherung einer fundamentaleren Theorie (Superstrings?) für im Vergleich zur Planck-Energie kleine Energien, d.h.als eine effektive Theorie mit eingeschränktem Anwendungsbereich, so sind die Anforderungen an diese Theorie schwächer als an die fundamentale Theorie. Insbesondere schließt die Nichtunitarität nicht die Anwendbarkeit im 1-Loop-Bereich aus. In diesem Kapitel wird nun die konforme Weyl-Gravitation, die aus der allgemeinen Form durch die Wahl der Parameterwerte $\omega = 0,\ \xi = 1/6$ 'entsteht', als effektive 1-Loop-Theorie behandelt. Diese Parameterwahl beschreibt eine konforme Theorie, d.h. eine Theorie, deren Wirkung invariant unter den konformen Transformationen

$$g'_{\mu\nu} = e^{2\sigma} g_{\mu\nu} \ , \tag{4.12}$$

$$\phi'_0 = e^{-\frac{n-2}{2}\sigma} \phi_0 \ , \tag{4.13}$$

$$\psi'_0 = e^{-\frac{n-1}{2}\sigma} \psi_0 \ , \tag{4.14}$$

$$A'_{0\mu} = A_{0\mu} \tag{4.15}$$

ist, was jedoch nur in $n = 4$ Dimensionen gilt. Die daraus resultierenden Probleme bei der dimensionalen Regularisierung, die 'konformen Anomalien', treten jedoch in den 1-Loop-Rechnungen nicht auf. Die Weyl-Gravitation zeigt multiplikative Renormierbarkeit in einer speziellen konformen Regularisierung und führt wegen $\xi = const.$ und $\omega = const.$ auf lediglich eine zusätzliche β-Funktion ($\beta(\theta)$) durch die Quantisierung der Gravitation. Da $\xi = 1/6$ ein Fixpunkt der Renormierungstransformationen ist (asymptotische konforme Invarianz), ist diese Wahl durchaus sinnvoll. Die Summe der Einschränkungen bedeutet jedoch, daß die Weyl-Gravitation lediglich als 'toy model', d.h. als Modell, an dem grundlegende Eigenschaften für realistischere Theorien betrachtet werden, angesehen werden kann. Die Wirkung dieses Modells ist:

$$\begin{aligned} S \ = \ & \int dx \sqrt{-g} \big(\frac{1}{\theta} C_{\mu\nu\alpha\beta} C^{\mu\nu\alpha\beta} + 1/12 R \phi_\alpha \phi_\alpha - 1/4 F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} \\ & + i\bar{\psi}_i \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi_i + 1/2 D_\mu \phi_\alpha D^\mu \phi_\alpha - 1/2 \psi_i \psi_j Y^\alpha_{ij} \phi_\alpha \\ & - 1/2 \bar{\psi}_i \bar{\psi}_j Y^{\alpha *}_{ij} \phi_\alpha - 1/24 V_{\alpha\beta\gamma\delta} \phi_\alpha \phi_\beta \phi_\gamma \phi_\delta \big) \ . \end{aligned} \tag{4.16}$$

4.2 Weyl-Gravitations-Beiträge zu den β-Funktionen

Es ergibt sich nur eine zusätzliche nichttriviale β-Funktion $\beta(\theta)$, da $\beta(\xi) = \beta(\omega) = 0$ wegen $\xi, \omega = const$. Überdies liefert die Quantengravitation keine 1-Loop-Beiträge zur Eich-β-Funktion. Die Beiträge sind unabhängig von der Eichgruppe der Lagrangedichte und sind lediglich additive Zusatzterme zu den flachenFunktionen. Mit $t = \ln(\mu/\mu_0)$ erhält man die modifizierten β-Funktionen für die Kopplungen:
Skalarkopplung [?]:

$$(4\pi)^2 \frac{dV}{dt} = \beta_V(flach) + \Delta\beta_V \tag{4.17}$$

mit

$$\Delta\beta_V = -\frac{123}{8}\theta V + \frac{5}{12}\theta^2 \; ; \tag{4.18}$$

Yukawakopplung:

$$(4\pi)^2 \frac{dY}{dt} = \beta_Y(flach) + \Delta\beta_Y \tag{4.19}$$

mit

$$\Delta\beta_Y = -\frac{61}{32}\theta Y \; ; \tag{4.20}$$

Gravitationskopplung:

$$(4\pi)^2 \frac{d\theta}{dt} = -\alpha^2\theta^2 \tag{4.21}$$

mit

$$\alpha^2 = \frac{199}{15} + \frac{1}{5N}N_1 + \frac{1}{10}N_{1/2} + \frac{1}{60}N_0 > 0 \tag{4.22}$$

$N_0, N_{1/2}, N_1$ sind die Anzahlen der Skalar-, Spinor- und Vektorfelder der Theorie mit der Eichgruppe SU(N) oder SO(N). Für die Gravitationskopplung erhält man:

$$\theta(t) = \frac{\theta_0}{1 + (\frac{\alpha}{4\pi})^2\theta_0 t} \; . \tag{4.23}$$

Da man für negative $t \to -\frac{(4\pi)^2}{\alpha^2\theta_0}$ den Gültigkeitsbereich der Störungstheorie wegen $\theta \to \infty$ verläßt, sind wir im folgenden auf die Betrachtung des Grenzwertes $t \to +\infty$ beschränkt, in dem die Weyl-Gravitation asymptotische Freiheit zeigt.

4.3 Renormierungsgruppenfluß

In [?] wurde der Renormierungsgruppenfluß anhand eines Potentialmodells analysiert. Gegenstand dieser Betrachtung ist nun die Erweiterung dieses Modells um obige Quantengravitationsbeiträge. Führt man analog zum Kapitel 2 neue Variable $G = (g/4\pi)^2$, $y = Y/g$, $v = V/g^2$ und $\vartheta = \theta/g^2$ ein, so ergeben sich folgende durch Quantengravitationsbeiträge geänderten Funktionen:

$$\begin{aligned} \frac{dy^\alpha}{dt} &= \frac{G}{2}[4y^\beta y^{\alpha\dagger} y^\beta + y^\alpha y^{\beta\dagger} y^\beta + y^\beta y^{\beta\dagger} y^\alpha \\ &+ y^\beta Sp(y^{\alpha\dagger} y^\beta + y^{\beta\dagger} y^\alpha) - (y^\alpha D + D y^\alpha)] + O(G^2) \end{aligned} \tag{4.24}$$

mit

$$D_{ij} = (6C_F)_{ij} + (\frac{61}{32}\vartheta - \lambda/2)\delta_{ij}, \tag{4.25}$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = G[\lambda\vartheta - \alpha^2\vartheta^2] + O(G^2) \tag{4.26}$$

und

$$\begin{aligned} G^{-1}\frac{dv_{\alpha\beta\gamma\delta}}{dt} &= v_{\alpha\beta\lambda\epsilon}v_{\lambda\epsilon\gamma\delta} + v_{\alpha\gamma\lambda\epsilon}v_{\beta\delta\lambda\epsilon} + v_{\alpha\delta\lambda\epsilon}v_{\beta\gamma\lambda\epsilon} \\ &+[1/2Sp(y^{\alpha\dagger}y^\lambda + y^{\lambda\dagger}y^\alpha) + (\frac{\lambda}{4} - \frac{123}{32}\vartheta)\delta^{\alpha\lambda} - 3C_B^{\alpha\lambda}]v_{\lambda\beta\gamma\delta} \\ &+[1/2Sp(y^{\beta\dagger}y^\lambda + y^{\lambda\dagger}y^\beta) + (\frac{\lambda}{4} - \frac{123}{32}\vartheta)\delta^{\beta\lambda} - 3C_B^{\beta\lambda}]v_{\alpha\lambda\gamma\delta} \\ &+[1/2Sp(y^{\gamma\dagger}y^\lambda + y^{\lambda\dagger}y^\gamma) + (\frac{\lambda}{4} - \frac{123}{32}\vartheta)\delta^{\gamma\lambda} - 3C_B^{\gamma\lambda}]v_{\alpha\beta\lambda\delta} \\ &+[1/2Sp(y^{\delta\dagger}y^\lambda + y^{\lambda\dagger}y^\delta) + (\frac{\lambda}{4} - \frac{123}{32}\vartheta)\delta^{\delta\lambda} - 3C_B^{\delta\lambda}]y_{\alpha\beta\gamma\lambda} \\ &+3(\{T_B^a, T_B^b\}^{\alpha\beta}\{T_B^a, T_B^b\}^{\gamma\delta} + \{T_B^a, T_B^b\}^{\alpha\gamma} \\ &\{T_B^a, T_B^b\}^{\beta\delta} + \{T_B^a, T_B^b\}^{\alpha\delta}\{T_B^a, T_B^b\}^{\beta\gamma}) \\ &-2Sp[(y^{\alpha\dagger}y^\beta + y^{\beta\dagger}y^\alpha)(y^{\gamma\dagger}y^\delta + y^{\delta\dagger}y^\gamma) \\ &(y^{\alpha\dagger}y^\gamma + y^{\gamma\dagger}y^\alpha)(y^{\beta\dagger}y^\delta + y^{\delta\dagger}y^\beta) \\ &(y^{\alpha\dagger}y^\delta + y^{\delta\dagger}y^\alpha)(y^{\beta\dagger}y^\gamma + y^{\gamma\dagger}y^\beta)] \\ &+\frac{5}{12}\vartheta^2 + O(G). \end{aligned} \tag{4.27}$$

Die Flüsse der Gravitations-, Yukawa- und Skalarkopplungen können nun durch Potentiale dargestellt werden. Man definiert hier:

$$U_\vartheta = \frac{1}{2}\lambda\vartheta^2 - \frac{1}{3}\alpha^2\vartheta^3, \tag{4.28}$$

Dieses Potential ist unabhängig von y und v. Die anderen Potentiale können also bei festem $\vartheta = \vartheta_{FP}$ betrachtet werden. In niedrigster Ordnung in G erhält man dann (analog zu [?]) einen Ausdruck mit symmetrischen Strukturen:

$$U_y = \frac{1}{3}\sum_{ijkl}|S_{ijkl}|^2 + \sum_{\alpha\beta}(I^{\alpha\beta})^2 + \sum_{ij}|M_{ij}|^2 \tag{4.29}$$

mit

$$S_{ijkl} = y^\alpha_{ij}y^\alpha_{kl} + y^\alpha_{ik}y^\alpha_{jl} + y^\alpha_{il}y^\alpha_{jk}, \tag{4.30}$$

$$I^{\alpha\beta} = Im(Sp(y^{\alpha\dagger}y^\beta)), \tag{4.31}$$

$$M = y^{\alpha\dagger}y^\alpha - D \tag{4.32}$$

und

$$\begin{aligned} U_v \;=\; & v_{\alpha\beta\gamma\delta}v_{\gamma\delta\lambda\epsilon}v_{\lambda\epsilon\alpha\delta} + 2[1/2Sp(y^{\alpha\dagger}y^\lambda + y^{\lambda\dagger}y^\alpha) \\ & +(\frac{\lambda}{4} - \frac{123}{32}\vartheta)\delta^{\alpha\lambda} - 3C_B^{\alpha\lambda}]v_{\alpha\beta\gamma\delta}v_{\lambda\beta\gamma\delta} \\ & +[3(\{T^a_B,T^b_B\}^{\alpha\beta}\{T^a_B,T^b_B\}^{\gamma\delta} + \{T^a_B,T^b_B\}^{\alpha\gamma}\{T^a_B,T^b_B\}^{\beta\delta} \\ & +\{T^a_B,T^b_B\}^{\alpha\delta}\{T^a_B,T^b_B\}^{\beta\gamma}) \\ & -2Sp((y^{\alpha\dagger}y^\beta + y^{\beta\dagger}y^\alpha)(y^{\gamma\dagger}y^\delta + y^{\delta\dagger}y^\gamma) \\ & +(y^{\alpha\dagger}y^\gamma + y^{\gamma\dagger}y^\alpha)(y^{\beta\dagger}y^\delta + y^{\delta\dagger}y^\beta) \\ & (y^{\alpha\dagger}y^\delta + y^{\delta\dagger}y^\alpha)(y^{\beta\dagger}y^\gamma + y^{\gamma\dagger}y^\beta)) + \frac{5}{12}\vartheta^2]v_{\alpha\beta\gamma\delta}\,. \end{aligned} \tag{4.33}$$

U_v wird hier zusätzlich bei festem $y = y_{FP}$ betrachtet, da U_y keine v-Abhängigkeit besitzt.
Geht man nun noch zu einem neuen Entwicklungsparameter τ durch

$$d\tau = \frac{G}{2}dt \quad (\tau_0 = 0) \tag{4.34}$$

mit

$$G(\tau) = G_0 e^{-2\lambda\tau} \quad (\lambda \neq 0) \tag{4.35}$$

über, so folgen die Renormierungsgruppengleichungen wie oben aus den Potentialen mit

$$\frac{1}{G}\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{dU_\vartheta}{d\vartheta}, \tag{4.36}$$

$$\frac{2}{G}\frac{dy^\alpha_{ij}}{dt} = \frac{dy^\alpha_{ij}}{d\tau} = \frac{\partial U_y}{\partial y^{\alpha\dagger}_{ij}}, \tag{4.37}$$

und

$$\frac{1}{G}\frac{dv^{\alpha\beta\gamma\delta}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dv^{\alpha\beta\gamma\delta}}{d\tau} = \frac{\partial U_v}{\partial v^{\alpha\beta\gamma\delta}}. \tag{4.38}$$

Betrachten wir nun diese Potentiale, so lassen sich Aussagen über deren Extrema, d.h. über die Fixpunkte der jeweiligen Kopplungskonstanten machen. Hierbei wird geprüft, ob Extrema vorhanden sind und wie diese gegebenenfalls bei festgehaltenen anderen Kopplungen angenähert werden. Da die beschriebene Weyl-Gravitation lediglich eine Ein-Loop-Näherung ist, kann der Fall $\lambda = 0$ für die Eichkopplung, in dem Zwei-Loop-Beiträge mit eventuellen Quantengravitationstermen die β(g)-Funktion bilden, hier nicht beschrieben werden. Allgemein folgt aus $G(t)$ und $\theta(t)$ für die Gültigkeit von Störungsrechnungen , daß nur der Fall $\lambda > 0$ und $t \to +\infty$ betrachtet werden kann.

4.3.1 Gravitationskopplungspotential

U_ϑ ist unbegrenzt, da kubisch in ϑ. Als Extrema ergeben sich hier für $\lambda > 0$ der triviale Fixpunkt $\vartheta = 0$ (Minimum des Potentials) und der UV-Fixpunkt (Maximum) $\vartheta = \frac{\lambda}{\alpha^2}$. Die Tatsache, daß der Letztere für $t \to \infty$ erreicht wird, sieht man leicht aus der expliziten Form von $\vartheta(t)$:

$$\vartheta(t) = \frac{\theta(t)}{(4\pi)^2 G(t)} = \frac{G_0^{-1} + \lambda t}{(4\pi)^2\theta_0^{-1} + \alpha^2 t} \; . \tag{4.39}$$

Es zeigt sich wiederum die Polstelle bei $t = -\frac{(4\pi)^2}{\theta_0 \alpha^2}$, welche, wie oben beschrieben, bedeutet, daß störungstheoretische Aussagen nur für $\tau \to +\infty$ bzw. $t \to +\infty$ möglich sind. In diesem Grenzwert kann folgende Parametrisierung vorgenommen werden:

$$\theta(t) \approx \frac{\lambda(4\pi)^2}{\alpha^2 G(t)} \tag{4.40}$$

Die β-Funktion $\frac{d\vartheta}{d\tau}$ kann natürlich auch direkt integriert werden:

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = 2[\lambda\vartheta - \alpha^2\vartheta^2] + O(G^2) \tag{4.41}$$

$\Rightarrow$

$$\vartheta(\tau) = \frac{\lambda}{\alpha^2}[1 - (1 - \frac{\lambda}{\vartheta_0 \alpha^2})e^{-2\lambda\tau}]^{-1} \tag{4.42}$$

Die Integrationskonstanten ergeben sich hier aus der asymptotischen Fixpunktannäherung und $\vartheta(\tau_0 = 0) = \vartheta_0$. Die Annäherung an den Fixpunkt $\vartheta = \frac{\lambda}{\alpha^2}$ wird durch den $e^{-2\lambda\tau}$-Term im Nenner bestimmt.

4.3.2 Yukawakopplungspotential

Bei der Betrachtung der Annäherungen an mögliche Fixpunkte wird mit obiger Argumentation im folgenden $\vartheta = \vartheta_{FP}$ angenommen, d.h. daß um den Fixpunkt

der Gravitationskopplung entwickelt wird. Betrachtet wird hier natürlich nur der Fall mit $\lambda > 0$, $\tau \to +\infty$ und $G \sim e^{-2\lambda\tau}$.
U_y wächst wegen der asymptotischen y^4-Abhängigkeit mit wachsendem y ins Unendliche, ist aber positiv definit (da eine Summe aus Betragsquadraten) und besitzt demnach ein globales Minimum für endliches y. Es handelt sich hier jedoch um einen IR-Fixpunkt, der für $\tau, t \to -\infty$, also außerhalb unserer Betrachtungsmöglichkeit, angenähert wird.
Wenn kein UV-Fixpunkt existiert beziehungsweise die y's nicht in dessen Anziehungsbereich liegen, so werden sie unendlich mit endlichem τ. Für $\frac{d\Delta y}{d\tau} \sim (\Delta y)^3$ zum Beispiel erhält man $\Delta y \sim \frac{1}{\sqrt{const.-\tau}}$. In diesem Bereich kann natürlich nicht mehr störungstheoretisch gerechnet werden.
Betrachten wir die Möglichkeit von Maxima, so findet man, daß U_y höchstens ein lokales Maximum besitzen kann. Wenn man $y^\alpha_{ij} = z(y_0)^\alpha_{ij}$ untersucht, erhält man für U_y die Form $a|z|^4 + b|z|^2 + c$ mit $a > 0$, woraus sich allgemein ergibt, daß höchstens ein Maximum an $y = 0$ existieren kann. Im Beispiel ist die Hesse'sche diagonal im y-Raum mit Elementen $-(D_{ii} + D_{jj})$, wobei ein Maximum natürlich nur bei deren positiver Definitheit vorliegt. Liegt y im Anziehungsbereich dieses Maximums, so wird $y^\alpha_{ij} = 0$ für kleine y durch

$$y^\alpha_{ij} \sim e^{-(D_{ii}+D_{jj})\tau} \sim G^{(D_{ii}+D_{jj})/(2\lambda)} \tag{4.43}$$

angenähert und der exponentielle Abfall wiederum durch die QG-Terme verstärkt. Sattelpunkte als unstabile Fixpunkte liegen zum Beispiel vor, wenn die Yukawakopplungen für manche Teilchen verschwinden, während sie für die anderen in einem Minimum von U_y liegen. Trotz deren Instabilität werden oft Theorien für recht große τ-Intervalle in deren Nähe bleiben. Ein exakter Fluß in den Sattelpunkt setzt jedoch exakt abgestimmte Anfangsbedingungen voraus. Deren einziger Daseinsgrund können globale Symmetrien mit Bedingungen an die Kopplungen sein, sodaß im eingeschränkten y-Raum die Extrema der Potentiale durch die Kopplungen angenähert werden (Beispiel: Supersymmetrie).

4.3.3 Skalarkopplungspotential

U_v ist unbegrenzt, da kubisch in v; es kann jedoch gezeigt werden, daß es höchstens ein einziges lokales Maximum und/oder Minimum besitzt. Betrachten wir nun den Fluß von v nahe den UV-Fixpunkten der Yukawa- und Gravitationskopplungen ($y = 0$ und $\vartheta = \frac{\lambda}{\alpha^2}$). Für die einfache Theorie mit einem einzigen reellen Skalar als Singulett unter der Eichgruppe ergibt sich:

$$\frac{dv}{d\tau} = 6v^2 + 2\lambda(1 - \frac{123}{8\alpha^2})v + \frac{5}{6\alpha^4} \tag{4.44}$$

Hier findet man als Fixpunktstellen:

$$v_{FP} = \frac{\lambda}{6}[\pm\sqrt{(1-\frac{123}{8\alpha^2})^2 - \frac{5}{\alpha^4}} + \frac{123}{8\alpha^2} - 1] \tag{4.45}$$

Mit der Definition $\Delta v = v - v_{FP}$ und der Hesseschen $H(v) = \frac{d^2U_v}{dv^2}$ erhält man die Annäherung an den UV-Fixpunkt

$$v_{FP} = \frac{\lambda}{6}[-\sqrt{(1-\frac{123}{8\alpha^2})^2 - \frac{5}{\alpha^4}} + \frac{123}{8\alpha^2} - 1 \tag{4.46}$$

über $\frac{d\Delta v}{d\tau} = H(v_{FP})\Delta v + O(\Delta v^2)$ durch

$$\Delta v = e^{-2\lambda\sqrt{(1-\frac{123}{8\alpha^2})^2-\frac{5}{\alpha^4}}\ \tau} . \tag{4.47}$$

Jedoch gibt es viele Theorien ohne Fixpunkt für v, was man daran sehen kann, daß der Ausdruck (für obige y, ϑ)

$$\begin{aligned} \frac{dv^{\alpha\alpha\gamma\gamma}}{2d\tau} &= (v^{\alpha\alpha\lambda\epsilon} - 6C_B^{\lambda\epsilon} + \frac{\lambda}{2}(1-\frac{123}{8\alpha^2})\delta^{\alpha\lambda})^2 + 2v^{\alpha\gamma\lambda\epsilon}v^{\alpha\gamma\lambda\epsilon} \\ &-12d_gQ_B + 6d_gS_B(\lambda(1-\frac{123}{8\alpha^2}) + 2S_B - c_g) \\ &-(\frac{\lambda}{2})^2(1-\frac{123}{8\alpha^2})^2 d_B + \frac{5}{12}(\frac{\lambda}{\alpha^2})^2 \end{aligned} \tag{4.48}$$

für viele Theorien positiv definit ist. Falls also kein UV-Fixpunkt vorhanden ist oder der Anfangspunkt außerhalb dessen Anziehungsbereich liegt, verläßt v für große τ den Anwendbarkeitsbereich der Störungstheorie:

$$\frac{dv}{d\tau} \sim v^2, \quad v \sim (const. - \tau)^{-1} . \tag{4.49}$$

Kapitel 5

Eine $F = 1$-Lösung

5.1 Lösungsansatz

Theorien, die den $F = 1$-Teilcheninhalt zeigen, wurden in [?] klassifiziert. Für die Yukawakopplungen der einfachsten nichtsupersymmetrischen dieser Liste, einer Theorie mit der Eichgruppe $SU(n)$, die 6 Skalare in der adjungierten und jeweils 4 Fermionen in der symmetrischen bzw. antisymmetrischen Darstellung enthält, konnte in [?] eine spezielle Lösung angegeben werden. Mit

$$\begin{gathered} S_A = n-2,\ S_S = n+2,\ S_{Ad} = c_g = 2n,\ S_{Sing} = Q_{Sing} = 0, \\ Q_A = 2(n-2)^2(n+1)/n,\ Q_S = 2(n+2)^2(n-1)/n \ \text{ und } Q_{Ad} = 4n^2 \end{gathered} \tag{5.1}$$

ist die Bedingung

$$F = 1 \Longleftrightarrow Q_B - 2Q_F + c_g(S_F - 2c_g) = 0 \tag{5.2}$$

für eine beliebige Anzahl zusätzlicher bosonischer und fermionischer Singuletts erfüllt. Uninteressant ist hier der Fall zusätzlicher fermionischer Singuletts, da sie wegen $Y^{\beta\dagger}Y^{\beta} = 6g^2C_F$ und $C_F = 0$ für Singulettdarstellungen nur trivial koppeln.

Gegenstand dieses Kapitels ist nun die Untersuchung des Einflusses von m skalaren Singuletts auf die Lösbarkeit des Systems. Der erste Schritt zur Lösung besteht in der Zerlegung der Darstellungen in ihre irreduziblen Komponenten:

$$\psi_i \to \psi^I_{\tilde{i}},\ \phi_\alpha \to \phi^B_{\tilde{\alpha}} \text{ und } Y^\alpha_{ij} \to Y^{\tilde{\alpha}IJ}_{B\,\tilde{i}\,\tilde{j}} = \sum_{k=1}^{N(B,I,J)} (\tilde{Z}^{(k)})^B_{IJ}(\Lambda^{(k)})^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{i}\tilde{j}}. \tag{5.3}$$

Hier läuft der Index $I \in \{1, \cdots 8\}$ über die verschiedenen fermionischen Darstellungen $\{I\} = \{I_A, I_{\bar{A}}, I_S, I_{\bar{S}}\}$, der Index $\tilde{i} = \tilde{i}(I)$ läuft innerhalb der jeweiligen (anti-)symmetrischen Darstellung I von 1 bis $n(n+1)/2$ bzw.

$n(n-1)/2$. Die irreduziblen bosonischen Darstellungen werden beschrieben durch $\alpha \to \{B, \tilde{\alpha}\} = \{(A, \tilde{\alpha}), (S)\}$, wobei die adjungierten Darstellungen durch $A \in \{1, \cdots 6\}$ und $\tilde{\alpha} \in \{1, \cdots (n^2-1)\}$, die Singuletts durch $S \in \{1, \cdots m\}$ beschrieben werden. $N(B, I, J)$ ist die Anzahl unabhängiger invarianter Tensoren, die die Eichinvarianzbedingung

$$T_B^{a\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}(\Lambda^{(k)})_{\tilde{i}\tilde{j}}^{\tilde{\beta}} + T_{\tilde{\imath}\tilde{l}}^{aI}(\Lambda^{(k)})_{\tilde{l}\tilde{j}}^{\tilde{\alpha}} + T_{\tilde{\jmath}\tilde{l}}^{aJ}(\Lambda^{(k)})_{\tilde{i}\tilde{l}}^{\tilde{\alpha}} = 0 \tag{5.4}$$

mit Indizes in den speziellen Darstellungen B, I und J erfüllen. $N(B, I, J)$ ist gleich der Anzahl von Singulettdarstellungen in der Zerlegung des direkten Produktes der irreduziblen Darstellungen B, I und J.
Für die Skalare in der adjungierten Darstellung erhält man für folgende Indexkombinationen nichtverschwindende invariante Tensoren (und zwar jeweils genau einen):

$$I_A, J_{\bar{A}} \to Sp(A^\mu T^a A^\nu), \tag{5.5}$$

$$I_A, J_{\bar{S}} \to Sp(S^\mu T^a A^\nu), \tag{5.6}$$

$$I_S, J_{\bar{A}} \to Sp(A^\mu T^a S^\nu), \tag{5.7}$$

$$I_S, J_{\bar{S}} \to Sp(S^\mu T^a S^\nu), \tag{5.8}$$

sowie deren Transponierte für $R \leftrightarrow \bar{R}$. Diese Tensoren ergeben sich aus der üblichen tensoriellen Konstruktion von $SU(n)$-Darstellungen, wobei T^a die Erzeugenden der fundamentalen Darstellung sind und A^μ, S^ν die Tensoren sind, die die (anti-)symmetrische Darstellung aus der Fundamentalen erzeugen:

$$T_{ij}^a T_{kl}^a = \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{1}{n}\delta_{ij}\delta_{kl}, \tag{5.9}$$

$$A_{ij}^\mu = -A_{ji}^\mu,\ A^{\mu\dagger} = A^\mu,\ A_{ij}^\mu A_{kl}^\mu = \delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl},\ Sp(A^\mu A^\nu) = 2\delta^{\mu\nu} \tag{5.10}$$

und

$$S_{ij}^\rho = S_{ji}^\rho,\ S^{\mu\dagger} = S^\mu,\ S_{ij}^\rho S_{kl}^\rho = \delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl},\ Sp(S^\mu S^\nu) = 2\delta^{\mu\nu}. \tag{5.11}$$

Für die skalaren Singuletts ergeben sich die invarianten Tensoren zu:

$$I_A, J_{\bar{A}} \to \delta^{\mu\nu}, \tag{5.12}$$

$$I_S, J_{\bar{S}} \to \delta^{\mu\nu}, \tag{5.13}$$

sowie deren Transponierte für $R \leftrightarrow \bar{R}$. Sämtliche anderen Kombinationen von Darstellungen führen auf triviale Kopplungen. Zusätzlich sind die Vorzeichen der Invarianten so gewählt, daß aus der Symmetrie der Yukawakopplungen folgt:

$$Y_{ij}^\alpha = Y_{ji}^\alpha \Rightarrow \tilde{Z}_{IJ}^A = \tilde{Z}_{JI}^A. \tag{5.14}$$

Eine Lösung des $F=1$-Systems beschränkt sich also auf die Variablen $\tilde{Z}^A_{I_A J_{\bar{A}}}$, $\tilde{Z}^A_{I_A J_{\bar{S}}}$, $\tilde{Z}^A_{I_S J_{\bar{A}}}$, $\tilde{Z}^A_{I_S J_{\bar{S}}}$, $\tilde{Z}^S_{I_A J_{\bar{A}}}$ und $\tilde{Z}^S_{I_S J_{\bar{S}}}$. Setzt man diese Zerlegungen in die die $F=1$-Bedingungen beschreibenden Gleichungen ein, so erhält man mit den Definitionen

$$Z^S_{I_A J_{\bar{A}}} = \sqrt{n/(12g^2(n+1))}\tilde{Z}^S_{I_A J_{\bar{A}}}\ ,\ Z^A_{I_A J_{\bar{S}}} = \sqrt{n/6g^2}\tilde{Z}^A_{I_A J_{\bar{S}}}, \tag{5.15}$$

$$Z^S_{I_S J_{\bar{S}}} = \sqrt{n/(12g^2(n-1)}\tilde{Z}^S_{I_S J_{\bar{S}}}\ ,\ Z^A_{I_A J_{\bar{A}}} = \sqrt{(n-2)/6g^2}\tilde{Z}^A_{I_A J_{\bar{A}}}, \tag{5.16}$$

$$Z^A_{I_S J_{\bar{A}}} = \sqrt{n/6g^2}\tilde{Z}^A_{I_S J_{\bar{A}}}\ ,\ Z^A_{I_S J_{\bar{S}}} = \sqrt{(n+2)/6g^2}\tilde{Z}^A_{I_S J_{\bar{S}}}, \tag{5.17}$$

$$\tilde{c}_A = \frac{nc_A}{2(n+1)} = n-2 \quad und \quad \tilde{c}_S = \frac{nc_S}{2(n-1)} = n+2, \tag{5.18}$$

(zu [?] analoge Rechnungen) folgende Entsprechungen:

- $Y^{\alpha\dagger}Y^{\alpha} = 6g^2C_F \iff$

$$\begin{aligned}
Z^{*S}_{I_A K_{\bar{A}}} Z^S_{J_A K_{\bar{A}}} + Z^{*A}_{I_A K_{\bar{A}}} Z^A_{J_A K_{\bar{A}}} + Z^{*A}_{I_A K_{\bar{S}}} Z^A_{J_A K_{\bar{S}}} &= \tilde{c}_A \delta_{I_A J_A}, & (5.19)\\
Z^{*S}_{K_A I_{\bar{A}}} Z^S_{K_A J_{\bar{A}}} + Z^{*A}_{K_A I_{\bar{A}}} Z^A_{K_A J_{\bar{A}}} + Z^{*A}_{K_S I_{\bar{A}}} Z^A_{K_S J_{\bar{A}}} &= \tilde{c}_A \delta_{I_{\bar{A}} J_{\bar{A}}}, & (5.20)\\
Z^{*S}_{I_S K_{\bar{S}}} Z^S_{J_S K_{\bar{S}}} + Z^{*A}_{I_S K_{\bar{A}}} Z^A_{J_S K_{\bar{A}}} + Z^{*A}_{I_S K_{\bar{S}}} Z^A_{J_S K_{\bar{S}}} &= \tilde{c}_S \delta_{I_S J_S}, & (5.21)\\
Z^{*S}_{K_S I_{\bar{S}}} Z^S_{K_S J_{\bar{S}}} + Z^{*A}_{K_A I_{\bar{S}}} Z^A_{K_A J_{\bar{S}}} + Z^{*A}_{K_S I_{\bar{S}}} Z^A_{K_S J_{\bar{S}}} &= \tilde{c}_S \delta_{I_{\bar{S}} J_{\bar{S}}}. & (5.22)
\end{aligned}$$

  Eine Linearkombination von Spuren über diese Gleichungen führt mit der Forderung nach Anomaliefreiheit der Theorie auf die Anzahlen der fermionischen Darstellungen (für beliebiges n):

$$N_{\bar{S}} = N_S = N_{\bar{A}} = N_A = 2. \tag{5.23}$$

- $Im(SpY^{\alpha\dagger}Y^{\beta}) = 0 \iff$

$$\begin{aligned}
Im[Z^{*A}_{K_A I_{\bar{A}}} Z^B_{K_A I_{\bar{A}}} + Z^{*A}_{K_A I_{\bar{S}}} Z^B_{K_A I_{\bar{S}}} + \\
Z^{*A}_{K_S I_{\bar{A}}} Z^B_{K_S I_{\bar{A}}} + Z^{*A}_{K_S I_{\bar{S}}} Z^B_{K_S I_{\bar{S}}}] &= 0, & (5.24)\\
Im[Z^{*S}_{K_A I_{\bar{A}}} Z^T_{K_A I_{\bar{A}}} + Z^{*S}_{K_S I_{\bar{S}}} Z^T_{K_S I_{\bar{S}}}] &= 0, & (5.25)
\end{aligned}$$

  wobei die Indizes A, B für die adjungierten und S, T für die Singulett-darstellungen stehen.

- $Y^{\alpha}_{ij}Y^{\alpha}_{kl} + Y^{\alpha}_{ik}Y^{\alpha}_{jl} + Y^{\alpha}_{il}Y^{\alpha}_{jk} = 0 \iff$

$$\begin{aligned}
Z^A_{I_A L_{\bar{A}}} Z^A_{J_A K_{\bar{A}}} + Z^A_{I_A K_{\bar{A}}} Z^A_{J_A L_{\bar{A}}} &= 0, & (5.26)\\
Z^A_{I_A K_{\bar{A}}} Z^A_{J_A L_{\bar{A}}} - \frac{1}{2}(n+1)(n-2) Z^S_{I_A K_{\bar{A}}} Z^S_{J_A L_{\bar{A}}} &= 0, & (5.27)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Z^A_{I_S L_{\bar S}} Z^A_{J_S K_{\bar S}} + Z^A_{I_S K_{\bar S}} Z^A_{J_S L_{\bar S}} &= 0, && (5.28)\\
Z^A_{I_S K_{\bar S}} Z^A_{J_S L_{\bar S}} - \frac{1}{2}(n-1)(n+2) Z^S_{I_S K_{\bar S}} Z^S_{J_S L_{\bar S}} &= 0, && (5.29)\\
Z^A_{I_A K_{\bar A}} Z^A_{J_S L_{\bar S}} &= 0, && (5.30)\\
Z^S_{I_A K_{\bar A}} Z^S_{J_S L_{\bar S}} &= 0, && (5.31)\\
Z^A_{I_A K_{\bar S}} Z^A_{J_S L_{\bar A}} &= 0, && (5.32)\\
Z^A_{I_A K_{\bar S}} Z^A_{J_A L_{\bar S}} + Z^A_{I_A L_{\bar S}} Z^A_{J_A K_{\bar S}} &= 0, && (5.33)\\
Z^A_{I_S K_{\bar A}} Z^A_{J_S L_{\bar A}} + Z^A_{I_S L_{\bar A}} Z^A_{J_S K_{\bar A}} &= 0, && (5.34)\\
Z^A_{I_A K_{\bar A}} Z^A_{J_A L_{\bar S}} - Z^A_{I_A L_{\bar S}} Z^A_{J_A K_{\bar A}} &= 0, && (5.35)\\
Z^A_{I_A K_{\bar A}} Z^A_{J_S L_{\bar A}} - Z^A_{I_A L_{\bar A}} Z^A_{J_S K_{\bar A}} &= 0, && (5.36)\\
Z^A_{I_A K_{\bar S}} Z^A_{J_S L_{\bar S}} - Z^A_{I_A L_{\bar S}} Z^A_{J_S K_{\bar S}} &= 0, && (5.37)\\
Z^A_{I_S K_{\bar A}} Z^A_{J_S L_{\bar S}} - Z^A_{I_S L_{\bar S}} Z^A_{J_S K_{\bar A}} &= 0. && (5.38)
\end{aligned}
$$

Zu beachten ist hier, daß die Gleichungen (**??**)-(**??**), die sich mit expliziten Darstellungen der A^μ, S^μ ergeben, z.T. nur für $n \geq 3$ gelten, was aber mit dem Hintergrund der Suche nach einer realistischen GUT-Eichgruppe als erfüllt angenommen werden darf. Die Gleichungen für die adjungierten Kopplungen sind invariant unter $O(6)$-Rotationen im bosonischen Sektor. Vernachlässigt man die Gleichungen (**??**),(**??**),(**??**) und (**??**), so besitzen die restlichen Gleichungen zusätzlich eine $[U(2)]^4$-Symmetrie bezüglich der fermionischen Darstellungen. Diese Symmetrien lassen sich zur Klassifikation möglicher Lösungsstrukturen ausnutzen.

5.2 Lösungsformen

Im folgenden werden wir bei der Lösung des Gleichungssystems entsprechend der $[U(2)]^4$-Symmetrie von 2 Blöcken mit je $2*4$ Vektoren $\{Z^A_{I_A J_{\bar A}}, Z^A_{I_S J_{\bar S}}\}$ und $\{Z^A_{I_A J_{\bar S}}, Z^A_{I_S J_{\bar A}}\}$ ausgehen (Z^A_{IJ}: Vektoren mit 6 Einträgen), wobei beide jeweils 3 verschiedene Lösungsstrukturen $\{\bar x_{IJ}, \tilde x_{IJ}\}$ (die jeweiligen 4-er-Unterblöcke können hier untereinander frei zugeordnet werden) für die Gleichungen (**??**), (**??**) und (**??**) bzw. (**??**)-(**??**) haben können. Kombinationen hiervon führen also auf insgesamt 9 mögliche Gesamtlösungsstrukturen, wobei zu beachten ist, daß die unten angegebenen, expliziten Formen der beiden Blöcke im allgemeinen in verschiedenen Basen angenommen werden.
Um nun bestimmte Strukturen als Lösungen aller $F = 1$-Gleichungen auszuschließen, müssen ihre Konsequenzen für die Form der Z^S_{IJ} anhand der Gleichungen (**??**),(**??**) und (**??**)-(**??**) betrachtet, sowie hieraus und mit (**??**),(**??**)

die Lösungsform(en) der Z^S_{IJ} bestimmt werden. Diese Ergebnisse werden dann in (??)-(??) und (??) eingesetzt. Skizzen der Rechnungen sind in Anhang B zusammangefaßt. Die möglichen Formen der $\{\bar{x}_{IJ}, \tilde{x}_{IJ}\}$ sind bis auf orthogonale Transformationen:

- A:

$$\bar{x}_{IJ} = (\bar{c}_{IJ}, i\bar{c}_{IJ}, \bar{d}_{IJ}, i\bar{d}_{IJ}, \bar{e}_{IJ}, i\bar{e}_{IJ}), \tag{5.39}$$
$$\tilde{x}_{IJ} = (\tilde{c}_{IJ}, i\tilde{c}_{IJ}, \tilde{d}_{IJ}, i\tilde{d}_{IJ}, \tilde{e}_{IJ}, i\tilde{e}_{IJ}). \tag{5.40}$$

- B:

$$\tilde{x}_{IJ} = (\tilde{c}_{IJ}, i\tilde{c}_{IJ}, 0, 0, 0, 0), \tag{5.41}$$
$$\bar{x}_{11} = (\bar{c}_{11}, i\bar{c}_{11}, \bar{d}_{11}, i\bar{d}_{11} 0, 0) \text{ mit } \bar{d}_{11} \neq 0, \tag{5.42}$$
$$\bar{x}_{12} = (\bar{c}_{12}, i\bar{c}_{12}, \bar{d}_{12}, i\bar{d}_{12}, \bar{e}_{12}, i\bar{e}_{12}) \text{ mit } \bar{e}_{12} \neq 0, \tag{5.43}$$
$$\bar{x}_{21} = (\bar{c}_{21}, i\bar{c}_{21}, \bar{d}_{21}, i\bar{d}_{21}, \bar{e}_{21}, -i\bar{e}_{21}) \text{ mit } \bar{e}_{21} \neq 0, \tag{5.44}$$
$$\bar{x}_{22} = (\bar{c}_{22}, i\bar{c}_{22}, \frac{\bar{d}_{12}\bar{d}_{21} - \bar{e}_{12}\bar{e}_{21}}{\bar{d}_{11}}, i\frac{\bar{d}_{12}\bar{d}_{21} + \bar{e}_{12}\bar{e}_{21}}{\bar{d}_{11}}, \frac{\bar{e}_{12}\bar{d}_{21} + \bar{d}_{12}\bar{e}_{21}}{\bar{d}_{11}}, i\frac{\bar{e}_{12}\bar{d}_{21} - \bar{d}_{12}\bar{e}_{21}}{\bar{d}_{11}}). \tag{5.45}$$

- C:

$$\tilde{x}_{IJ} = (0, 0, 0, 0, 0, 0), \tag{5.46}$$
$$\bar{x}_{11} = (\bar{c}_{11}, i\bar{c}_{11}, 0, 0, 0, 0) \text{ mit } \bar{c}_{11} \neq 0, \tag{5.47}$$
$$\bar{x}_{12} = (\bar{c}_{12}, i\bar{c}_{12}, \bar{d}_{12}, i\bar{d}_{12}, 0, 0) \text{ mit } \bar{d}_{12} \neq 0, \tag{5.48}$$
$$\bar{x}_{21} = (\bar{c}_{21}, i\bar{c}_{21}, \bar{d}_{21}, i\bar{e}_{21}, \bar{f}_{21}, i\bar{g}_{21}), \tag{5.49}$$
$$\bar{x}_{22} = (\bar{b}_{22}, i\bar{c}_{22}, \bar{d}_{22}, i\bar{e}_{22}, \bar{f}_{22}, i\bar{g}_{22}) \tag{5.50}$$

mit

$$\bar{c}_{11}(\bar{b}_{22} - \bar{c}_{22}) = -\bar{d}_{12}(\bar{d}_{21} - \bar{e}_{21}) \neq 0, \tag{5.51}$$
$$\bar{d}^2_{21} - \bar{e}^2_{21} + \bar{f}^2_{21} - \bar{g}^2_{21} = 0, \tag{5.52}$$
$$\bar{c}_{12}(\bar{b}_{22} - \bar{c}_{22}) + \bar{d}_{12}(\bar{d}_{22} - \bar{e}_{22}) = 0, \tag{5.53}$$
$$\bar{c}_{21}(\bar{b}_{22} - \bar{c}_{22}) + \bar{d}_{21}\bar{d}_{22} - \bar{e}_{21}\bar{e}_{22} + \bar{f}_{21}\bar{f}_{22} - \bar{g}_{21}\bar{g}_{22} = 0, \tag{5.54}$$
$$\bar{b}^2_{22} - \bar{c}^2_{22} + \bar{d}^2_{22} - \bar{e}^2_{22} + \bar{f}^2_{22} - \bar{g}^2_{22} = 0. \tag{5.55}$$

Mögliche Singulettkopplungen müssen neben (??)-(??) das folgende Gleichungssystem lösen:

$$Z^S_{I_S K_{\bar{S}}} Z^S_{J_A L_{\bar{A}}} = 0, \tag{5.56}$$

$$\begin{aligned} Z^S_{I_A K_{\bar A}} Z^S_{J_A L_{\bar A}} + Z^S_{I_A L_{\bar A}} Z^S_{J_A K_{\bar A}} &= 0, & (5.57)\\ Z^S_{I_S K_{\bar S}} Z^S_{J_S L_{\bar S}} + Z^S_{I_S L_{\bar S}} Z^S_{J_S K_{\bar S}} &= 0, & (5.58)\\ Im[Z^{*S}_{K_A I_{\bar A}} Z^T_{K_A I_{\bar A}} + Z^{*S}_{K_S I_{\bar S}} Z^T_{K_S I_{\bar S}}] &= 0. & (5.59) \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem führt für $m \leq 3$ Singuletts auf triviale Lösungen. Es kann gezeigt werden (siehe Anhang B), daß sich die allgemeinsten Lösungen von (??)-(??) für $m > 3$ auf die Lösung für $m = 4$ zurückführen lassen. Es gibt hier 2 verschiedene Lösungstypen:
Die erste Lösung ist bis auf $O(m)$-Rotationen und einen gemeinsamen komplexen Vorfaktor c gegeben durch

$$\begin{aligned} Z^S_{I_A J_{\bar A}} &= (0,0,0,0,0,\ldots,0)\ \forall I_A, J_{\bar A}, & (5.60)\\ Z^S_{1_S 1_{\bar S}} &= (e^{-i\phi}, ie^{-i\phi}, 0,0,0,\ldots,0), & (5.61)\\ Z^S_{1_S 2_{\bar S}} &= (0,0,e^{-i\phi}, ie^{-i\phi}, 0,\ldots,0), & (5.62)\\ Z^S_{2_S 1_{\bar S}} &= (0,0,e^{i\phi}, -ie^{i\phi}, 0,\ldots,0), & (5.63)\\ Z^S_{2_S 2_{\bar S}} &= (-e^{i\phi}, ie^{i\phi}, 0,0,0,\ldots,0). & (5.64) \end{aligned}$$

Hier sind die Z^S_{IJ} Vektoren mit m Einträgen, von denen die letzten $m-4$ verschwinden. Hiermit erhält man aus (??)

$$Z^S_{1_S 2_{\bar S}} Z^S_{2_S 1_{\bar S}} = -Z^S_{1_S 1_{\bar S}} Z^S_{2_S 2_{\bar S}} = -2c^2. \qquad (5.65)$$

Die zweite Lösung ist gegeben durch $(A,\bar A) \leftrightarrow (S,\bar S)$.
Die Gleichungen (??)-(??) behalten dann ihre Form ohne Singuletterme und mit den Ersetzungen $\tilde c_S \to \bar c_S = \tilde c_S - 4|c|^2$ für $Z^S_{I_A J_{\bar A}} = 0$ bzw. $\tilde c_A \to \bar c_A = \tilde c_A - 4|c|^2$ für $Z^S_{I_S J_{\bar S}} = 0$. Diese Form der Singulettkopplungen und die Gleichungen (??), (??) ermöglichen es nun, bestimmte Lösungsstrukturen der adjungierten Kopplungen auszuschließen. Als einzige Möglichkeiten (siehe Anhang B) verbleiben die beiden Formen:

- Wenn die Kopplungen $\{Z^A_{I_A J_{\bar A}}, Z^A_{I_S J_{\bar S}}\}$ die Form B mit $Z^A_{I_A J_{\bar A}} = \tilde x_{IJ}$ und $Z^A_{I_S J_{\bar S}} = \bar x_{IJ}$ und die Kopplungen $\{Z^A_{I_A J_{\bar S}}, Z^A_{I_S J_{\bar A}}\}$ die Form A annehmen, kann ich diese Lösung bei einer $SU(n)$-Eichgruppe nur für $n \geq 8$ ausschließen. In dieser Lösung sind nichtverschwindende Singulettkopplungen möglich.

- Wenn die $\{Z^A_{I_A J_{\bar A}}, Z^A_{I_S J_{\bar S}}\}$ und die $\{Z^A_{I_A J_{\bar S}}, Z^A_{I_S J_{\bar A}}\}$ (in verschiedenen Basen!) die Form A annehmen, ist die Lösung für alle n eine Lösung des $F=1$-Gleichungssystems, führt jedoch auf verschwindende Singulettkopplungen. Eine konkrete Form dieser Lösung wurde bereits in [?] angegeben.

Kapitel 6

Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurden folgende Aspekte der Renormierung von allgemeinen Yang-Mills-Theorien betrachtet:

- Die 1-Loop-β-Funktionen der Eich-, Yukawa- und ϕ^4-Kopplungen wurden nachgerechnet.

- Den aus dem Verschwinden dieser β-Funktionen in [?] abgeleiteten, sogenannten $F = 1$-Strukturen als notwendige Bedingung für die Endlichkeit einer Theorie wurden in verschiedenen Eichungen die jeweiligen Feynmangraphensummen zugeordnet. Hinweise auf eine tieferliegende Symmetrie konnten nicht gefunden werden.

- Die β-Funktionen wurden wie in [?] als Gradienten von Potentialen dargestellt und dieses Modell des Renormierungsgruppenflusses um Beiträge einer speziellen R^2-Gravitation, der Weyl-Gravitation [?], erweitert. Es wurden Einschränkungen hinsichtlich der Gültigkeit störungstheoretischer Rechnungen festgestellt.

- Ausgehend von einer in [?] angegebenen Lösung des $F = 1$-Systems, einer Theorie mit $SU(n)$-Eichgruppe, 6 adjungierten bosonischen Darstellungen und jeweils 4 symmetrischen bzw. antisymmetrischen fermionischen Darstellungen, wurde deren Erweiterung um zusätzliche bosonische Singuletts untersucht. Hier konnte gezeigt werden, daß sich dieses Problem immer auf den Fall 4 zusätzlicher Singuletts reduzieren läßt. Mit der Lösung der Singulettkopplungen konnten schließlich für $n > 7$ koppelnde Singuletts ausgeschlossen werden.

Aus Zeitgründen konnten die Lösungen aus Kapitel 5 nicht auf Dirac-Fermionen übertragen werden.
Darüberhinaus bleibt noch die Lösung der Skalarkopplungen mit den speziellen

$F = 1$-Lösungen der Yukawakopplungen. Diese führt jedoch schon im ersten Schritt der Zerlegung der Kopplung auf 9 (8 für $n \leq 3$) invariante Tensoren, also auf ein recht unüberschaubares Gleichungssystem.

Anhang A

Weyl-, Majorana- und Dirac-Spinoren

A.1 Allgemeine Identitäten

Die im ungebrochenen Georgi-Glashow-Modell auftretenden Spinoren sind entweder linkshändig (LH) oder rechtshändig (RH). Deswegen ist es günstig, sie im Falle der Betrachtung einer als masselos genäherten Theorie im Gegensatz zu früheren Arbeiten (z.B. [?]) als 2-komponentige LH-Weyl-Spinoren zu behandeln. Im folgenden Abschnitt soll der Zusammenhang zwischen den Lagrange- und Betafunktionen in der Dirac- und Weyl-Fermionen-'Sprache' erläutert werden (siehe auch [?], [?]).
Die Dirac'schen γ-Matrizen, die die Clifford-Algebra $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ erfüllen, haben in der Weyl-Darstellung die Form:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

mit

$$\sigma^\mu = (1_2, \vec{\sigma}),\ \bar{\sigma}^\mu = (1_2, -\vec{\sigma}) \tag{A.2}$$

und den Pauli'schen Spin-Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{A.3}$$

Mit der Definition $\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ ergibt sich hier

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -1_2 & 0 \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix} \tag{A.4}$$

Aus einem Dirac-Spinor lassen sich hiermit die links- und rechtshändigen Anteile projizieren:

$$\phi = \phi_L + \phi_R = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{A.5}$$

mit

$$\phi_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\phi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \psi_R = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \tag{A.6}$$

ψ^α und $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$ sind zweikomponentige Weyl-Spinoren ($\alpha, \dot{\alpha} \in \{1,2\}$ mit dem Übergang von ungepunkteten zu gepunkteten Indizes durch Komplexkonjugtion:

$$\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \equiv (\psi^\alpha)^* \ , \ \chi^\alpha \equiv (\bar{\chi}^{\dot{\alpha}})^* \tag{A.7}$$

Führt man eine 'Spinormetrik' so ein, daß mit

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = i\sigma^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -i\sigma^2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \tag{A.8}$$

$$\psi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta \ , \ \psi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta \ , \tag{A.9}$$

$$\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \text{ und } \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \tag{A.10}$$

gilt, so erhält man für den ladungskonjugierten Dirac-Spinor mit der Ladungskonjugationsmatrix $C = \omega\gamma^0\gamma^2 = \omega diag(-\sigma^2, \sigma^2)$ (Aus der Forderung $(\phi^c)^c = \phi$ erhält man $|\omega| = 1$, woraus man willkürlich $\omega = -i$ auswählt.):

$$\phi^c \equiv C\bar{\phi}^T = C\phi^* = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \ . \tag{A.11}$$

Ein Dirac-Spinor läßt sich also aus einem linkshändigen Weyl-Spinor ψ_α und einem rechtshändigen (linkshändig-ladungskonjugierten) Weyl-Spinor $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$ zusammensetzen.

Aus den Weyl-Spinoren, die als Grassmann-Variablen den Antikommutationsrelationen

$$\{\psi, \chi\} = \{\bar{\psi}, \bar{\chi}\} = \{\psi, \bar{\chi}\} = 0 \tag{A.12}$$

gehorchen, lassen sich nun kovariante Bilineare (hier werden nur Skalare und Vektoren betrachtet) der folgenden Form bilden:

$$\chi\psi \equiv \chi^\alpha\psi_\alpha = -\chi_\alpha\psi^\alpha = \psi^\alpha\chi_\alpha \equiv \psi\chi \ , \tag{A.13}$$

$$\bar{\chi}\bar{\psi} \equiv \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \equiv \bar{\psi}\bar{\chi} \ , \tag{A.14}$$

$$\bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\psi \equiv \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha}\psi_\alpha = \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}(\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}\alpha}\psi^\alpha \tag{A.15}$$

$$\chi\sigma^\mu\bar{\psi} \equiv \chi^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \chi_\alpha(\bar{\sigma}^\mu)^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}. \tag{A.16}$$

Zusätzlich definiert man die hermitesche Konjugation von (Produkten aus) Weyl-Spinoren:

$$(\psi_\alpha)^\dagger \equiv (\psi_\alpha)^* = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\ ,\ (\chi^\alpha)^\dagger \equiv (\chi^\alpha)^* = \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}\ ,\ (\chi\psi)^\dagger \equiv \psi^\dagger\chi^\dagger = \bar{\chi}\bar{\psi}\ , \tag{A.17}$$

$$(\chi\sigma^\mu\bar{\psi})^\dagger = \psi\sigma^\mu\bar{\chi} = -\bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\psi = -(\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\chi)^\dagger\ . \tag{A.18}$$

Mit diesen Definitionen und Relationen lassen sich die kovarianten Bilineare aus Dirac-Spinoren durch Weyl-Fermionen ausdrücken. Zu beachten ist hier, daß eine Theorie mit N Dirac-Spinoren in eine Theorie mit $2N$ Weyl-Spinoren übergeht.

$$\phi_i = \begin{pmatrix} \psi_{\alpha i} \\ \bar{\chi}_i^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{A.19}$$

$$\bar{\phi}_i\phi_j = \bar{\psi}_i\bar{\chi}_j + \chi_i\psi_j = \bar{\chi}_j\bar{\psi}_i + \psi_j\chi_i = (\bar{\phi}_j\phi_i)^\dagger \tag{A.20}$$

$$\bar{\phi}_i\gamma_5\phi_j = \bar{\psi}_i\bar{\chi}_j - \chi_i\psi_j = \bar{\chi}_j\bar{\psi}_i - \psi_j\chi_i = -(\bar{\phi}_j\gamma_5\phi_i)^\dagger \tag{A.21}$$

$$\bar{\phi}_i\gamma^\mu\phi_j = \chi_i\sigma^\mu\bar{\chi}_j + \bar{\psi}_i\bar{\sigma}^\mu\psi_j = -\bar{\chi}_j\bar{\sigma}^\mu\chi_i + \bar{\psi}_i\bar{\sigma}^\mu\psi_j = (\bar{\phi}_j\gamma^\mu\phi_i)^\dagger \tag{A.22}$$

$$\bar{\phi}_i\gamma^\mu\gamma_5\phi_j = \chi_i\sigma^\mu\bar{\chi}_j - \bar{\psi}_i\bar{\sigma}^\mu\psi_j = -\bar{\chi}_j\bar{\sigma}^\mu\chi_i - \bar{\psi}_i\bar{\sigma}^\mu\psi_j = (\bar{\phi}_j\gamma^\mu\gamma_5\phi_i)^\dagger \tag{A.23}$$

Diese Weyl-Bilineare lassen sich nun wiederum in Majorana-kovariante Bilineare umschreiben, wobei Majorana-Spinoren durch die Forderung $\omega_i^c = \omega$ als Invarianten unter Ladungskonjugation definiert sind. Der Vorteil dieser Schreibweise ist, daß man nach Umschreibung der Weyl-Lagrangedichte in eine Majorana-Lagrangedichte bei der Berechnung von Feynman-Diagrammen die bekannten γ-Matrix-Identitäten verwenden kann. Es ergeben sich nun folgende Zusammenhänge:

$$\Omega_i = \begin{pmatrix} \psi_{\alpha i} \\ \bar{\psi}_i^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{A.24}$$

$$\bar{\Omega}_i\Omega_j = \bar{\psi}_i\bar{\psi}_j + \psi_i\psi_j = (\bar{\Omega}_i\Omega_j)^\dagger \tag{A.25}$$

$$\bar{\Omega}_i\gamma_5\Omega_j = \bar{\psi}_i\bar{\psi}_j - \psi_i\psi_j = -(\bar{\Omega}_i\gamma_5\Omega_j)^\dagger \tag{A.26}$$

$$\bar{\Omega}_i\gamma^\mu\Omega_j = \psi_i\sigma^\mu\bar{\psi}_j + \bar{\psi}_i\bar{\sigma}^\mu\psi_j = -\bar{\psi}_j\bar{\sigma}^\mu\psi_i + \bar{\psi}_i\bar{\sigma}^\mu\psi_j = -(\bar{\Omega}_i\gamma^\mu\Omega_j)^\dagger \tag{A.27}$$

$$\bar{\Omega}_i\gamma^\mu\gamma_5\Omega_j = \psi_i\sigma^\mu\bar{\psi}_j - \bar{\psi}_i\bar{\sigma}^\mu\psi_j = -\bar{\psi}_j\bar{\sigma}^\mu\psi_i - \bar{\psi}_i\bar{\sigma}^\mu\psi_j = -(\bar{\Omega}_i\gamma^\mu\gamma_5\Omega_j)^\dagger \tag{A.28}$$

A.2 Lagrangedichte und Art der Fermionen

Der kinetische Term und die Yukawa-Kopplungen in Dirac-Schreibweise mit N Dirac-Fermionen lassen sich durch entsprechende Weyl-Terme und diese wiederum durch Majorana-Terme ausdrücken. Für den kinetischen Term erhält man:

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_i\gamma^\mu\partial_\mu\phi_i &= -(\partial_\mu\bar{\chi}_i)\bar{\sigma}^\mu\chi_i + \bar{\psi}_i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i \\ &= -\partial_\mu(\bar{\chi}_i\bar{\sigma}^\mu\chi_i) + \bar{\chi}_i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi_i + \bar{\psi}_i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i\end{aligned} \tag{A.29}$$

Die Summation läuft über die N Dirac-Spinoren und die totale Divergenz kann als Oberflächenterm weggelassen werden. Mit der Identifikation $\chi_i = \psi_{N+i}$ ist dieses gleich einer Summe über $2N$ Weyl- bzw. Majorana-Spinoren:

$$\bar{\psi}_j\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_j = \frac{1}{2}\bar{\Omega}_j\gamma^\mu\partial_\mu\Omega_j \tag{A.30}$$

Für die allgemeinen Yukawakopplungen mit skalarem und pseudoskalarem Anteil (Skalare φ_α)erhält man folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned}L_{Yuk} &= \bar{\phi}_i H^\alpha_{ij}\phi_j\varphi_\alpha \\ &= \bar{\phi}_i(h^{1\alpha}_{ij} - i\gamma_5 h^{2\alpha}_{ij})\phi_j\varphi_\alpha \\ &= [(\bar{\psi}_i\bar{\chi}_j + \chi_i\psi_j)h^{1\alpha}_{ij} - [(\bar{\psi}_i\bar{\chi}_j - \chi_i\psi_j)ih^{2\alpha}_{ij}]\varphi_\alpha \\ &= [\bar{\psi}_i\bar{\psi}_{N+j}(h^{1\alpha}_{ij} - ih^{2\alpha}_{ij}) + \psi_{N+i}\psi_j(h^{1\alpha}_{ij} + ih^{2\alpha}_{ij})]\varphi_\alpha \\ &= \bar{\psi}_i\bar{\psi}_{N+j}h^{\alpha\dagger}_{ij}\varphi_\alpha + \psi_{N+i}\psi_j h^\alpha_{ij}\varphi_\alpha\end{aligned} \tag{A.31}$$

mit $h^{1\alpha}_{ij} = Re(h^\alpha_{ij})$ und $h^{2\alpha}_{ij} = Im(h^\alpha_{ij})$. Für festes α habe die $2N \times 2N$-Matrix Y^α_{ij} die Form

$$Y^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & h^{\alpha T} \\ h^\alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (h^{1\alpha} + ih^{2\alpha})^T \\ (h^{1\alpha} + ih^{2\alpha}) & 0 \end{pmatrix}\ , \tag{A.32}$$

womit mit man den Yukawaterm für Weyl-Fermionen erhält:

$$L_{Yuk} = \frac{1}{2}\psi_i\psi_j Y^\alpha_{ij}\varphi_\alpha + \frac{1}{2}\bar{\psi}_i\bar{\psi}_j Y^{\alpha\dagger}_{ij}\varphi_\alpha \tag{A.33}$$

Eine Äquivalenz zwischen der Weyl- und der Dirac-Darstellung besteht also nur, wenn man eine spezielle Klasse von Yukawakopplungen Y, die durch unitäre Transformationen in die obige Form gebracht werden können, betrachtet. Die allgemeinen Yukawakopplungen in Weyl-Schreibweise können jedoch immer durch Majorana-Fermionen beschrieben werden, wobei der Vorteil dieser Darstellung darin liegt, daß man in Feynmangraphenrechnungen die bekannten γ-Matrix-Identitäten verwenden kann.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\psi_i\psi_j Y_{ij}^{\alpha}\varphi_\alpha + \frac{1}{2}\bar{\psi}_i\bar{\psi}_j Y_{ij}^{\alpha\dagger}\varphi_\alpha &= \frac{1}{4}\bar{\Omega}_i(1-\gamma_5)\Omega_j Y_{ij}^{\alpha}\varphi_\alpha \\ &\quad + \frac{1}{4}\bar{\Omega}_i(1+\gamma_5)\Omega_j Y_{ij}^{\alpha\dagger}\varphi_\alpha \end{aligned} \tag{A.34}$$

Anhang B

Mögliche $F = 1$-Lösungen

Die Lösungen des $F = 1$-Systems mit zusätzlichen skalaren Singuletts müssen folgenden Gleichungen genügen: (??)-(??) und (??)-(??). Zur Bestimmung der Gesamtlösungen werden zuerst die allgemeinste Form der Singulettkopplungen und dann die hiermit möglichen Formen der adjungierten Kopplungen ermittelt. Die Analyse der komplexen Gleichungssysteme wird vereinfacht, wenn man die Invarianz einiger Teilsysyteme unter orthogonalen Transformationen im bosonischen Sektor und unter unitären Transformationen im fermionischen Sektor ausnutzt.

B.1 Singulettkopplungen

Mögliche Singulettkopplungen müssen das folgende Gleichungssystem lösen:

$$Z^S_{I_S K_{\bar{S}}} Z^S_{J_A L_{\bar{A}}} = 0, \tag{B.1}$$

$$Z^S_{I_A K_{\bar{A}}} Z^S_{J_A L_{\bar{A}}} + Z^S_{I_A L_{\bar{A}}} Z^S_{J_A K_{\bar{A}}} = 0, \tag{B.2}$$

$$Z^S_{I_S K_{\bar{S}}} Z^S_{J_S L_{\bar{S}}} + Z^S_{I_S L_{\bar{S}}} Z^S_{J_S K_{\bar{S}}} = 0, \tag{B.3}$$

$$I^{ST} \equiv Im[Z^{*S}_{K_A I_{\bar{A}}} Z^T_{K_A I_{\bar{A}}} + Z^{*S}_{K_S I_{\bar{S}}} Z^T_{K_S I_{\bar{S}}}] = 0. \tag{B.4}$$

Hier steht der Skalarindex $S \in \{1, \ldots m\}$ für m zusätzliche Singuletts. Eine Analyse der Lösungsformen der adjungierten Kopplungen wird zeigen, daß höchstens in einer der Gleichungen (??)-(??) beide Summanden von 0 verschieden sind. Diese Eigenschaft gilt dann auch für die Gleichungen (??)-(??), sodaß man in neuen Notationen der Kopplungen

$$Z^S_{1_A 1_{\bar{A}}} = x^S_1 \tag{B.5}$$

$$Z^S_{1_A 2_{\bar{A}}} = x^S_2 \tag{B.6}$$

$$Z^S_{2_A 1_{\bar{A}}} = x^S_3 \tag{B.7}$$

$$Z^S_{2_A 2_{\bar{A}}} = x^S_4 \tag{B.8}$$
$$Z^S_{1_S 1_{\bar{S}}} = x^S_5 \tag{B.9}$$
$$Z^S_{1_S 2_{\bar{S}}} = x^S_6 \tag{B.10}$$
$$Z^S_{2_S 1_{\bar{S}}} = x^S_7 \tag{B.11}$$
$$Z^S_{2_S 2_{\bar{S}}} = x^S_8 \tag{B.12}$$

bzw. $(A, \bar{A}) \leftrightarrow (S, \bar{S})$ in beiden Fällen die unter $O(m)$-Transformationen invarianten Bedingungen

$$0 = I^{AB} = Im(\sum_l x^A_l x^B_l) \tag{B.13}$$
$$0 \neq x_5 x_8 = -x_6 x_7 \tag{B.14}$$
$$0 = x_i x_j \ sonst \tag{B.15}$$

erhält.
Betrachten wir nun den Fall mit $m \geq 16$ Singuletts und gehen zunächst davon aus, das kein Vektor verschwindet. Wir können analog zu [?] die $O(m)$-Freiheit benutzen, um die reellen Anteile von x_1 in die erste Komponente zu rotieren. Dann sind die restlichen Einträge imaginär und können mit der verbleibenden $0(m-1)$-Freiheit in die zweite Komponente rotiert werden. Man erhält dann mit $x_1^2 = 0$ die Form $x_1 = (c_1, ic_1, 0, \ldots 0)$. Mit $x_1 x_l = 0$ folgt für die restlichen Vektoren $x_l = (c_l, ic_l, \ldots)$. Führt man dieses Verfahren nun noch für die restlichen Komponenten durch, so erhält man bis auf $O(m)$-Rotationen die Form

$$x_1 = (c_1, ic_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots), \tag{B.16}$$
$$x_2 = (c_2, ic_2, d_2, id_2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots), \tag{B.17}$$
$$x_3 = (c_3, ic_3, d_3, id_3, e_3, ie_3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots), \tag{B.18}$$
$$x_4 = (c_4, ic_4, d_4, id_4, e_4, ie_4, f_4, if_4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots), \tag{B.19}$$
$$x_5 = (c_5, ic_5, d_5, id_5, e_5, ie_5, f_5, if_5, g_5, ig_5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots), \tag{B.20}$$
$$x_6 = (c_6, ic_6, d_6, id_6, e_6, ie_6, f_6, if_6, g_6, ig_6, h_6, ih_6, 0, 0, 0, 0, \ldots), \tag{B.21}$$
$$x_7 = (c_7, ic_7, d_7, id_7, e_7, ie_7, f_7, if_7, g_7, ig_7, h_7, i\hat{h}_7, k_7, i\hat{k}_7, 0, \ldots), \tag{B.22}$$
$$x_8 = (c_8, ic_8, d_8, id_8, e_8, ie_8, f_8, if_8, g_8, i\hat{g}_8, h_8, i\hat{h}_8, k_8, i\hat{k}_8, l_8, i\hat{l}_8, 0, \ldots). \tag{B.23}$$

In den ersten 8 Komponenten der Vektoren müssen wegen der Orthogonalitätsbedingungen also immer Paare p_l, ip_l etc. auftreten. In diesem Sinne 'einzelne' Einträge verschwinden. Sollten n der ersten Vektoren verschwinden, so reduzieren sich die $2n$ vorderen Einträge offensichtlich alle auf 0.

Aus $I^{12} = I^{34} = I^{56} = I^{78} = 0$ erhält man $|c_l| = |d_l| = |e_l| = |f_l| = 0$, d.h. man kann das Problem $m \geq 8$ zusätzlicher Singuletts auf das Problem mit 8 Singuletts zurückführen.
Betrachten wir nun das System $m = 8$ mit

$$\begin{aligned} x_i &= 0\ \forall i \in \{1, \dots 4\}, & \text{(B.24)} \\ x_5 &= (g_5, ig_5, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & \text{(B.25)} \\ x_6 &= (g_6, ig_6, h_6, i\hat{h}_6, k_6, i\hat{k}_6, 0, 0), & \text{(B.26)} \\ x_7 &= (g_7, ig_7, h_7, i\hat{h}_7, k_7, i\hat{k}_7, l_7, i\hat{l}_7), & \text{(B.27)} \\ x_8 &= (g_8, i\hat{g}_8, h_8, i\hat{h}_8, 0, 0, 0, 0). & \text{(B.28)} \end{aligned}$$

Das zu erfüllende Gleichungssystem (**??**)-(**??**) für diese Vektoren ist invariant unter einer $[U(1)]^3$-Symmetrie, sodaß g_6, g_7, g_8 rell gewählt werden können. Mit $I^{17} = I^{18} = I^{27} = I^{28} = 0$ erhält man dann $l_7 = \hat{l}_7 = 0 \vee g_7 = 0$. Im ersten Fall erhält man sofort eine Reduktion auf 6 nichtverschwindende Komponenten, im zweiten Fall erhält man aus $I^{17} = I^{18} = I^{27} = I^{28} = 0$ die Bedingungen $k_6 = \hat{k}_6 = 0 \vee g_6 = 0$. Hier führt der erste Fall durch $O(4)$-Rotationen ebenfalls sofort auf 6 Komponenten. Im zweiten Fall läßt sich mit (**??**) für die ersten 4 Komponenten und $x_8^2 = 0$ zeigen, daß $h_8 = \hat{h}_8 = 0$ gilt und dann mit $O(6)$-Rotationen eine Reduktion auf $m = 6$ möglich ist.
Für $m = 7$ ergibt eine analoge (einfachere) Betrachtung ebenfalls eine Reduktion auf $m = 6$.
Da der Fall $m \geq 6$ also immer auf den Fall $m = 6$ zurückgeführt werden kann, betrachten wir nun diesen Fall.

$$\begin{aligned} x_i &= 0\ \forall i \in \{1, \dots 4\}, & \text{(B.29)} \\ x_5 &= (g_5, ig_5, 0, 0, 0, 0), & \text{(B.30)} \\ x_6 &= (g_6, ig_6, h_6, i\hat{h}_6, k_6, i\hat{k}_6), & \text{(B.31)} \\ x_7 &= (g_7, ig_7, h_7, i\hat{h}_7, k_7, i\hat{k}_7), & \text{(B.32)} \\ x_8 &= (g_8, i\hat{g}_8, h_8, i\hat{h}_8, 0, 0). & \text{(B.33)} \end{aligned}$$

Hier ergeben, nachdem man unter Ausnutzung der $[U(1)]^3$-Symmetrie g_6, g_7, g_8 reell gewählt hat, $I^{15} = I^{16} = I^{25} = I^{26} = 0$ die Bedingungen

$$k_6 g_6 + k_7 g_7 = 0\ ,\ \hat{k}_6 g_6 + \hat{k}_7 g_7 = 0. \tag{B.34}$$

Während die Fälle $g_6 = 0 \wedge g_7 \neq 0$ bzw. $g_7 = 0 \wedge g_6 \neq 0$ leicht durch Widersprüche mit (**??**) auszuschließen sind, verdienen die beiden restlichen Fälle besondere Beachtung:

- $g_6 = g_7 = 0$: Mit (**??**) kann man zeigen, daß $h_8 = \hat{h}_8 = 0$ und dann mit (**??**), (**??**) $\hat{g}_8 = -g_8$ gilt. Durch Ausnutzen der $O(4)$-Freiheit für x_6

und x_7 und erneute Verwendung von (??), sowie (??) erhält man nun die Reduktion auf $m = 4$ Singuletts der Form

$$\begin{aligned} x_i &= 0 \ \forall i \in \{1, \dots 4\}, && \text{(B.35)} \\ x_5 &= c(e^{-i\phi}, ie^{-i\phi}, 0, 0), && \text{(B.36)} \\ x_6 &= c(0, 0, e^{-i\phi}, ie^{-i\phi}), && \text{(B.37)} \\ x_7 &= c(0, 0, e^{i\phi}, -ie^{i\phi}), && \text{(B.38)} \\ x_8 &= c(-e^{i\phi}, ie^{i\phi}, 0, 0). && \text{(B.39)} \end{aligned}$$

Hier ist c ein gemeinsamer komplexer Vorfaktor.

- $g_6 \neq 0 \wedge g_7 \neq 0$: Mit $I^{16}, I^{26}, I^{15}, I^{25}$ erhält man $\hat{k}_i = \alpha k_i$ mit einem gemeinsamen rellen α. Durch $O(2)$-Rotationen können die $\hat{k}_i$ 'weggedreht' werden, man erhält eine Reduktion auf $m = 5$ Singuletts (mit neuen $k_i \neq 0$):

$$\begin{aligned} x_i &= 0 \ \forall i \in \{1, \dots 4\}, && \text{(B.40)} \\ x_5 &= (g_5, ig_5, 0, 0, 0), && \text{(B.41)} \\ x_6 &= (g_6, ig_6, h_6, i\hat{h}_6, k_6), && \text{(B.42)} \\ x_7 &= (g_7, ig_7, h_7, i\hat{h}_7, k_7), && \text{(B.43)} \\ x_8 &= (g_8, i\hat{g}_8, h_8, i\hat{h}_8, 0). && \text{(B.44)} \end{aligned}$$

Hier werden nun folgende Unterfälle betrachtet:

  - $h_8 = 0 \vee \hat{h}_8 = 0$: Durch $O(3)$-Rotationen kann die Form $x_6 = (g_6, ig_6, h_6, ih_6, 0)$ erreicht werden. Mit I^{15}, I^{25} erhält man dann $k_7 = 0$ und die Reduktion auf $m = 4$ Singuletts.
  - $h_8 \neq 0 \wedge \hat{h}_8 \neq 0$: Mit I^{15}, I^{25} ergibt sich $k_6 = -g_7$ und mit $x_6 x_8 = 0$, $x_7 x_8 = 0$ folgt $(h_6 - h_7/g_7)h_8 = (\hat{h}_6 - h_7/g_7)\hat{h}_8$. Aus I^{35}, I^{45} bekommt man dann $\hat{h}_8 = i\beta h_8$ mit reellem β. Durch $O(3)$-Rotationen kann deshalb der vorige Fall und damit eine Reduktion auf $m = 4$ Singuletts erreicht werden.

Der Fall $m \geq 4$ kann also immer auf den Fall $m = 4$ zurückgeführt werden. Es kann gezeigt werden, daß die allgemeinste Lösung von (??)-(??) dann die Form (??)-(??) besitzt. Für $m \leq 3$ existieren keine Lösungen.
Man erhält also für die erste Lösung:

$$Z^S_{1_S 2_{\bar{S}}} Z^S_{2_S 1_{\bar{S}}} = -Z^S_{1_S 1_{\bar{S}}} Z^S_{2_S 2_{\bar{S}}} = 2c^2, \tag{B.45}$$

$$Z^A_{1_S 2_{\bar{S}}} Z^A_{2_S 1_{\bar{S}}} = -Z^A_{1_S 1_{\bar{S}}} Z^A_{2_S 2_{\bar{S}}} = (n-1)(n+2)c^2, \tag{B.46}$$

$$Z^S_{I_A J_{\bar{A}}} = 0, \tag{B.47}$$

$$Z^{*S}_{I_S K_{\bar{S}}} Z^S_{J_S K_{\bar{S}}} = 4|c|^2 \delta_{I_S J_S}, \tag{B.48}$$

$$Z^{*S}_{K_S I_{\bar{S}}} Z^S_{K_S J_{\bar{S}}} = 4|c|^2 \delta_{I_{\bar{S}} J_{\bar{S}}}. \tag{B.49}$$

Die zweite Lösung ist dann gegeben durch $(A, \bar{A}) \leftrightarrow (S, \bar{S})$.
Die Gleichungen (??)-(??) behalten demnach ihre Form ohne Singuletterme und mit den Ersetzungen $\tilde{c}_S \to \bar{c}_S = \tilde{c}_S - 4|c|^2$ für $Z^S_{I_A J_{\bar{A}}} = 0$ bzw. $\tilde{c}_A \to \bar{c}_A = \tilde{c}_A - 4|c|^2$ für $Z^S_{I_S J_{\bar{S}}} = 0$.

B.2 'Adjungierte' Kopplungen

Mit der oben erhaltenen Form der Singulettkopplungen können nun bestimmte Lösungen der adjungierten Kopplungen ausgeschlossen werden (Anm.: Große Teile der folgenden Rechnungen gehen auf H. Skarke zurück.). Wir betrachten im folgenden verschiedene Lösungsformen der Gleichungen (??), (??), (??) für die Kopplungen $\{Z^A_{I_A J_{\bar{A}}}, Z^A_{I_S J_{\bar{S}}}\}$, sowie der Gleichungen (??) -(??) für die $\{Z^A_{I_A J_{\bar{S}}}, Z^A_{I_S J_{\bar{A}}}\}$. Man kann zeigen, daß diese Gleichungen für jedes System die in Kapitel 5 beschriebenen Lösungstypen A,B,C zulassen. Man hat also 9 mögliche Lösungskombinationen. Zur Vereinfachung der Notation führen wir analog zum vorigen Abschnitt die Systeme $\{\bar{x}_{IJ}, \tilde{x}_{IJ}\}$ und $\{\bar{y}_{IJ}, \tilde{y}_{IJ}\}$ ein, die jeweils einem der obigen Z-Systeme zugeordnet werden. Dies führt auf folgende Fälle:

B.2.1 Lösung A in beiden Systemen

In [?] wurde eine Lösung angegeben, die die Lösungsform A in beiden Systemen zeigt. Hier ergibt sich

$$\begin{aligned} Z^A_{I_A J_{\bar{A}}} Z^A_{K_A L_{\bar{A}}} &= 0, & \text{(B.50)} \\ Z^A_{I_S J_{\bar{S}}} Z^A_{K_S L_{\bar{S}}} &= 0 & \text{(B.51)} \end{aligned}$$

und mit (??), (??) folgt $c = 0$, d.h. diese Lösung führt auf verschwindende Singulettkopplungen.

B.2.2 Lösung B in mindestens einem System

Das Vorliegen der Lösung C im anderen System ist oben bereits ausgeschlossen worden. Für die vorliegende Lösung B

$$\begin{aligned} \bar{x}_{IJ} &\sim (c_{IJ}, ic_{IJ}, 0, 0, 0, 0) & \text{(B.52)} \\ \tilde{x}_{IJ} &\sim (d_{IJ}, id_{IJ}, \ldots) & \text{(B.53)} \end{aligned}$$

erhält man mit (??)-(??) und $I^{12} = 0$ analog zum letzten Fall nun allgemein $c_{22} = 0$ in der fermionischen Basis, die c_{IJ} diagonalisiert. Dies bedeutet $\sum |\bar{x}|^2 = 2|c_{11}|^2$. Wir betrachten dann getrennt die beiden Formen des anderen Systems.

- Lösung B im anderen System:

$$\bar{y}_{IJ} \sim (e_{IJ}, ie_{IJ}, 0, 0, 0, 0) \tag{B.54}$$

  e_{IJ} ist mit obigen Argumenten singulär, man kann also $e_{IJ} = \alpha_I \beta J$ ansetzen. O. B. d. A. kann man nun die Zuordnungen $\bar{x}_{IJ} \to Z^A_{I_A J\bar{A}}$ oder $\bar{x}_{IJ} \to Z^A_{I_S J\bar{S}}$ machen. Im ersten Fall führt je nach $\bar{y}_{IJ}$-Zuordnung eine Spur über (??) oder (??) auf $\alpha_1 = 0$. Die andere Spur führt dann mit (??) und (??) auf $Z^A_{I_S J\bar{A}} \sim (f_{IJ}, if_{IJ}, \ldots)$ und $Z^A_{I_A J\bar{S}} \sim (g_{IJ}, ig_{IJ}, \ldots)$ in der oben angegebenen Basis. Dies fuhrt wiederum auf einen Widerspruch zu $I^{12} = 0$ und damit zum Ausschluß der Lösung. Im zweiten Fall führt eine analoge Argumentation mit(??), (??), (??) und (??) zum Ausschluß dieser Lösung. Die Lösung B in einem System erfordert also eine andere Lösungsform des zweiten Systems.

- Lösung A im anderen System: Allgemein erhält man aus Spuren über (??)-(??) die Beziehung $\sum |Z^A_{I_S K_{\bar{A}}}|^2 = \sum |Z^A_{I_A K_{\bar{S}}}|^2$. Wir betrachten nun einzeln die Fälle:

  - $\bar{x}_{IJ} \to Z^A_{I_A J\bar{S}}$ bzw. $\bar{x}_{IJ} \to Z^A_{I_S J\bar{A}}$: Aus (??) bzw. (??) folgt dann

  $$\sum |Z^A_{I_S K_{\bar{A}}}|^2 = \sum |Z^A_{I_A K_{\bar{S}}}|^2 = 2|c_{11}|^2 \leq \tilde{c}_A. \tag{B.55}$$

    Aus Spuren über (??) und (?? ergibt sich

  $$\sum |Z^A_{I_S K_{\bar{S}}}|^2 + \sum |Z^A_{I_A K_{\bar{A}}}|^2 \geq 2\tilde{c}_S, \tag{B.56}$$
  $$\sum |Z^A_{I_S K_{\bar{A}}}|^2 + \sum |Z^A_{I_A K_{\bar{S}}}|^2 \leq 2\tilde{c}_A. \tag{B.57}$$

    Dies widerspricht mit $\tilde{c}_A < \tilde{c}_S$ der Bedingung (??) und schließt die Lösung aus.

  - $\bar{x}_{IJ} \to Z^A_{I_S J\bar{S}}$: Mit (??) erhält man $\sum |Z^A_{I_S K_{\bar{S}}}|^2 = 2|c_{11}|^2 \leq \tilde{c}_S$ und

  $$\sum |Z^A_{I_S K_{\bar{A}}}|^2 = \sum |Z^A_{I_A K_{\bar{S}}}|^2 \geq \tilde{c}_S. \tag{B.58}$$

    Aus (??) ergibt sich $\sum |Z^A_{I_A K_{\bar{A}}}|^2 \leq 2\bar{c}_A - \tilde{c}_S$ und hiermit

  $$\sum |Z^A_{I_S K_{\bar{S}}}|^2 + \sum |Z^A_{I_A K_{\bar{A}}}|^2 < \sum |Z^A_{I_S K_{\bar{A}}}|^2 + \sum |Z^A_{I_A K_{\bar{S}}}|^2. \tag{B.59}$$

    Dies widerspricht mit $\bar{c}_A < \tilde{c}_S$ der Bedingung (??) und schließt die Lösung aus.

– $\bar{x}_{IJ} \to Z^A_{I_A J_{\bar{A}}}$: Mit (??) und (??) ergibt sich in derselben Basis

$$Z^A_{2_A L_{\bar{S}}} = (c_{2_A L_{\bar{S}}}, ic_{2_A L_{\bar{S}}}, \ldots), Z^A_{L_S 2_{\bar{A}}} = (c_{L_S 2_{\bar{A}}}, ic_{L_S 2_{\bar{A}}}, \ldots). \quad (B.60)$$

Mit folgendem Ansatz für die restlichen Kopplungen

$$\begin{aligned} Z^A_{1_A L_{\bar{S}}} &= (c_{1_A L_{\bar{S}}} + \tilde{c}_{1_A L_{\bar{S}}}, c_{1_A L_{\bar{S}}} - \tilde{c}_{1_A L_{\bar{S}}}, \ldots), \\ Z^A_{L_S 1_{\bar{A}}} &= (c_{L_S 1_{\bar{A}}} + \tilde{c}_{L_S 1_{\bar{A}}}, c_{L_S 1_{\bar{A}}} - \tilde{c}_{L_S 1_{\bar{A}}}, \ldots) \end{aligned} \quad (B.61)$$

erhält man dann aus $I^{12} = 0$

$$\sum |\tilde{c}_{1_A L_{\bar{S}}}|^2 + \sum |\tilde{c}_{L_S 1_{\bar{A}}}|^2 = \sum_{I,J,A,\bar{A},S\bar{S}} |c|^2. \quad (B.62)$$

Mithin gilt also

$$\sum |\tilde{c}_{L_S 1_{\bar{A}}}|^2 + \sum |\tilde{c}_{1_A L_{\bar{S}}}|^2 \geq |c_{1_S 1_{\bar{A}}}|^2. \quad (B.63)$$

Aus den Spuren über die Gleichungen (??) und (??) ergibt sich

$$\sum |\tilde{c}_{L_S 1_{\bar{A}}}|^2 + \sum |\tilde{c}_{1_A L_{\bar{S}}}|^2 + 2|c_{1_S 1_{\bar{A}}}|^2 \leq \tilde{c}_A \quad (B.64)$$

und dann mit (??) allgemein

$$\sum |Z^A_{I_A J_{\bar{A}}}|^2 \leq 2/3\tilde{c}_A, \quad (B.65)$$

sowie hieraus und mit obigen Spuren

$$\sum |Z^A_{I_S J_{\bar{A}}}|^2 = \sum |Z^A_{I_A J_{\bar{S}}}|^2 = 4/3\tilde{c}_A. \quad (B.66)$$

Aus der Spur über (??) erhält man dann

$$\sum |Z^A_{I_S J_{\bar{S}}}|^2 \leq 2\bar{c}_S - 4/3\tilde{c}_A \quad (B.67)$$

und insgesamt

$$\begin{aligned} \sum |Z^A_{I_S J_{\bar{A}}}|^2 + \sum |Z^A_{I_A J_{\bar{S}}}|^2 &\geq 8/3\tilde{c}_A \\ \sum |Z^A_{I_S J_{\bar{S}}}|^2 + \sum |Z^A_{I_A J_{\bar{A}}}|^2 &\leq 2\bar{c}_S - 2/3\tilde{c}_a. \end{aligned} \quad (B.68)$$

Mit (??) und $\tilde{c}_A = n - 2$, sowie $\bar{c}_S = n + 2 - 4|c|^2$ folgt dann für $c \neq 0$ ($c = 0$ entspricht der Lösung A in beiden Systemen)

$$n < 8. \quad (B.69)$$

Eine Lösung dieser Art mit nichttrivialen Singulettkopplungen ist also nur für $n < 8$ möglich. Meine Versuche eine spezielle Lösung hierfür zu finden, bzw. diese Lösung ganz auszuschließen, blieben leider erfolglos.

B.2.3 Lösung C in mindestens einem System

Ist die Lösung C in mindestens einem System verwirklicht, so kann man 3 Fälle unterscheiden:

- $Z^A_{I_S J_{\bar{S}}} = 0$ ergibt mit (??) $Z^S_{I_S J_{\bar{S}}} = 0$ und $\tilde{c}_A \to \bar{c}_A$. Spurbildung über (??), (??) führt dann auf

$$Z^{*A}_{I_S K_{\bar{A}}} Z^A_{I_S K_{\bar{A}}} = Z^{*A}_{I_A K_{\bar{S}}} Z^A_{I_A K_{\bar{S}}} = 2\tilde{c}_S. \tag{B.70}$$

  Setzt man dieses in eine Spur über (??), (??) ein, so erhält man mit

$$Z^{*A}_{I_A K_{\bar{A}}} Z^A_{I_A K_{\bar{A}}} = -8(1 + |c|^2) \tag{B.71}$$

  eine negative Norm der Kopplungen und kann diese Lösung hiermit ausschließen.

- $Z^A_{I_A J_{\bar{S}}} = 0 \Leftrightarrow Z^A_{I_S J_{\bar{A}}} = 0$: Die Äquivalenz ergibt sich aus Spuren über (??), (??). $I^{12} = 0$ erfordert die Form C für das zweite System. Da aus $Z^A_{I_A J_{\bar{A}}} = 0$ mit einer Spur über (??) $0 = \tilde{c}_A$ und aus $Z^A_{I_S J_{\bar{S}}} = 0$ mit einer Spur über (??) $0 = \tilde{c}_S$ folgt, ist diese Lösung ebenfalls ausgeschlossen.

- $Z^A_{I_A J_{\bar{A}}} = 0$ ergibt mit (??) $Z^S_{I_A J_{\bar{A}}} = 0$ und $\tilde{c}_S \to \bar{c}_S$. Hier unterscheiden wir die 3 Unterfälle der verschiedenen Lösungen des anderen Systems.

  - Die Lösung C für das andere System ist im vorigen Fall 2 bereits ausgeschlossen worden.
  - Lösung A für das andere System: Mit Schritten analog zum Fall 1 erhält man

$$|Z^A_{I_A K_{\bar{S}}}|^2 = |Z^A_{I_S K_{\bar{K}}}|^2 = 2\tilde{c}_A = 2(n-2) \tag{B.72}$$

    und hieraus

$$|Z^A_{I_A K_{\bar{A}}}|^2 + |Z^A_{I_S K_{\bar{S}}}|^2 = |Z^A_{I_S K_{\bar{S}}}|^2 = 8(1 - |c|^2) \tag{B.73}$$

    In [?] wurde gezeigt, daß mit $I^{AB} = 0$ für Systeme, in denen das zweite System die Form A einnimmt, gilt:

$$|Z^A_{I_A K_{\bar{A}}}|^2 + |Z^A_{I_S K_{\bar{S}}}|^2 \geq |Z^A_{I_S K_{\bar{A}}}|^2 + |Z^A_{I_A K_{\bar{S}}}|^2 \tag{B.74}$$

    Hieraus ergibt sich dann $4 \geq n + 2|c|^2$. Für realistische GUT's kann man diese Lösung demnach ausschließen.

– Lösung B für das andere System: Vernachlässigt man die Gleichungen (??), (??), (??), (??), so kann man unter Ausnutzung der $[U(2)]^4$-Symmetrie bezüglich der Mischung der Fermionen, für die Formen

$$\bar{y}_{IJ} \sim (c_{IJ}, ic_{IJ}, 0, 0, 0, 0) \tag{B.75}$$

$$\tilde{y}_{IJ} \sim (d_{IJ}, id_{IJ}, \ldots) \tag{B.76}$$

die c_{IJ} diagonalisieren. Je nachdem, ob nun $\bar{y}_{IJ} \sim Z^A_{I_A J\bar{S}}$ oder $\bar{y}_{IJ} \sim Z^A_{I_S J\bar{A}}$ vorliegt, folgt mit (??) bzw. (??) für die Kopplungen $Z^A_{I_S J\bar{S}} \sim (e_{IJ}, ie_{IJ}, \ldots)$ und hieraus ein Widerspruch zu $I^{12} = 0$. Man muß also o. B. d. A. $c_{22} = 0$ annehmen. Die Matrix c_{IJ} ist singulär. Dies führt auf einen Widerspruch mit Spuren über (??) bzw. (??), also zum Ausschluß dieser Lösung.

Anhang C

C.1 Danksagung

Mein Dank gilt vor allem Herrn Dr. Harald Skarke für die gute Betreuung und ständige Hilfsbereitschaft. Weiterhin danke ich Herrn Prof. Dr. Lechtenfeld für die Vergabe des Themas, sowie allen, mit denen ich eine angenehme und gute Zeit hatte.

C.2 Selbständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, die vorgelegte Arbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln erstellt zu haben.

Hannover, den 31.10.1995

Literaturverzeichnis

[1] M. Kaku. *Quantum field theory.* Oxford: Oxford Univ. Press (1993).

[2] T. Cheng, L. Li *Gauge theory of elementary particle physics* Oxford: Clarendon Press (1984).

[3] G. Kranner *Dissertation.* Wien: Techn. Univ. Wien (1990).

[4] G. Kranner, W. Kummer *Phys. Lett.* B259(1991)84.

[5] G. Bonneau *Int. Journ. Mod. Phys.* A5(1990)3831.

[6] T. Cheng, E. Eichten, L. Li. *Phys. Rev.* D6(1974)2932.

[7] M. Böhm, A. Denner. *Nucl. Phys.* B282(1987)206.

[8] M. Machacek, M. Vaughn. *Nucl. Phys.* B277(1983)153.

[9] L. Abbott. *Nucl. Physics* B185(1981)189.

[10] H. Skarke. *Phys. Letters* B336(1994)32.

[11] S. Odintsov, I. Buchbinder, I. Shapiro. *Effective action in quantum gravity.* Bristol: IOP Publishing (1992).

[12] H. Skarke. *Int. Journ. of Mod. Phys.* A9(1994)711.

[13] P. Sikivie, F. Gürsey *Phys. Rev* D16(1977)816.

[14] P. Srivastava *Supersymmetry, Superfields and Supergravity* Bristol: IOP Publishing(1986).