FOURIERTRANSFORMATION

Die Fouriertransformation ist eine besonders nützliche Art, Funktionen als Linearkombinationen von gutmütigen Basisfunktionen zu schreiben. Sie erlaubt es oft, partielle Differentialgleichungen mit rein algebraischen Mitteln lösen zu können.

[P18] *Komplexe Fourierreihe*
Die komplexe Fourierreihe

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(x)\, g_n\,, \qquad f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx\frac{2\pi}{L}}\,, \qquad g_n = (f_n, g) = \int_I \mathrm{d}x\, f_n{}^*(x)\, g(x)\,,$$

stellt im Intervall $I = [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ quadratintegrable Funktionen $g : I \mapsto \mathbb{C}$, $(g, g) < \infty$, bis auf Ausnahmemengen vom Maß Null dar.

(a) Zeigen Sie, dass $g_n^* = g_{-n}$ genau dann gilt, wenn $g = g^*$ eine reelle Funktion ist.
(b) Schreiben Sie

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \left(\cos(nx\frac{2\pi}{L}) + \mathrm{i}\sin(nx\frac{2\pi}{L}) \right) .$$

und fassen Sie die Beiträge von n und $-n$ zur reellen Fourierreihe zusammen:

$$g(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx\frac{2\pi}{L}) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx\frac{2\pi}{L})\,.$$

(c) Wie drücken sich a_n und b_n durch Integrale mit den Winkelfunktionen aus?

[P19] *Anwendung des Residuensatzes*
Betrachten Sie das Integral aus [P15],

$$\int \mathrm{d}x \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2 = -\frac{1}{4} \lim_{\varepsilon\to 0} \int \mathrm{d}x \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} - 2}{x^2 + \varepsilon^2}\,.$$

(a) Warum gilt obige Identität? Zeigen Sie, dass das Integral auch geschrieben werden kann als

$$\int \mathrm{d}x \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} - 2}{x^2 + \varepsilon^2} = 2 \int \mathrm{d}x \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - 1}{(x + \mathrm{i}\varepsilon)(x - \mathrm{i}\varepsilon)}\,.$$

(b) Verwenden Sie die Argumentation für Integrale rationaler Funktionen aus der Vorlesung, um das Integral durch die Residuen in der *oberen* Halbebene auszudrücken. Es sei hierfür $\varepsilon > 0$.
(c) Berechnen Sie das Residuum und bestimmen Sie so den Wert des ursprünglichen Integrals.