MEHRDIMENSIONALE INTEGRALE

Mehrdimensionale Integrale treten sehr häufig in der Physik auf. Viele wichtige Messgrößen sind durch solche Integrale definiert. Es ist daher sehr wichtig, damit umgehen zu können.

[H32] *Bogenlänge* **[$1+1+1+1+1=5$ Punkte]**

Wir betrachten Kurven in der Ebene und interessieren uns für die Länge von Stücken von diesen.

(a) Die ebene Kurve sei durch $\vec{r}(t) \doteq (t, f(t))$ mit $a \le t \le b$ parametrisiert. Zeigen Sie, dass sich die Bogenlänge durch $\ell = \int_a^b \mathrm{d}t\, \sqrt{1+(f'(t))^2}$ berechnen lässt.

(b) Es sei konkret $f(t) = c\cosh\frac{t}{c}$ mit $0 \le t \le b$ und $c > 0$. Berechnen Sie die Bogenlänge. Es handelt sich um ein Stück einer Kettenlinie.

(c) In Polarkoordinaten wird eine ebene Kurve durch $\vec{r}(\varphi) \doteq (r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)$ mit $a \le \varphi \le b$ parametrisiert. Beweisen Sie, dass die Bogenlänge durch $\ell = \int_a^b \mathrm{d}\varphi\, \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}$ gegeben ist.

(d) Berechnen Sie konkret die Bogenlänge für ein Stück einer archimedischen Spirale: $r(\varphi) = c\,\varphi$ mit $0 \le \varphi \le 2\pi$.

(e) Berechnen Sie konkret die Bogenlänge für die Kardioide: $r(\varphi) = c(1+\cos\varphi)$ mit $0 \le \varphi \le 2\pi$ und $c > 0$.

[H33] *Leistung* **[5 Punkte]**

Ein Hüttendach D mit welliger Höhe $h(x,y) = h_0 + d\,\cos(\frac{2\pi n}{L}x)$, n eine natürliche Zahl, über einer Grundfläche $(x,y) \in [0,L] \times [0,L]$ wird von der Sonne bestrahlt. Der aus der Richtung $(-1,-1,+1)$ kommende Photonenstrom wird noch durch eine Wolke ortsabhängig abgeschwächt, so dass die Energiestromdichte $\vec{j}(\vec{r})$, also der Energiefluss pro Zeit und Fläche, am Ort $\vec{r} \doteq (x,y,t)$ die Form

$$\vec{j}(\vec{r}) \doteq \left(\alpha\frac{z}{h_0} - \beta\frac{x}{L}\right)\begin{pmatrix}+1\\+1\\-1\end{pmatrix} \quad \text{mit } \alpha,\beta > 0$$

hat. Mit wie viel Energie pro Zeit (Leistung) $P = -\int_D \mathrm{d}\vec{A}\cdot\vec{j}(\vec{r})$ wird das Dach $\vec{r} \doteq (x,y,h(x,y))$ bei vollständiger Absorption aufgeheizt?

Hinweis: Ein Integral $\int_0^L \mathrm{d}x\, x\, \sin(kx)$ kann mit partieller Integration gelöst werden. Das Ergebnis lautet $P = (\alpha - \frac{\beta}{2})L^2 - \beta dL$.

[C8] *Oberflächenintegrale* **[$1+1+1+1+1=5$ Punkte]**

In dieser MATHEMATICA-Übung sollen Sie allgemeine Prozeduren erstellen, die Ihnen generell Oberflächenintegrale ausrechnen können. Sie dürfen dafür nur elementare Befehle verwenden, keine Prozeduren aus dem `VectorAnalysis` Arsenal von MATHEMATICA.

(a) Definieren Sie eine Funktion, die für eine Oberfläche A aus einem Material, dessen Dichte gemäß einer Funktion σ variiert, die Masse (pro Einheitsdicke) berechnet. Die einzige Komplikation dabei ist, dass Sie den Betrag des vektoriellen Flächenelementes, $|\mathrm{d}\vec{A}|$, in Ihrer Funktion berechnen müssen.

(b) Überprüfen Sie Ihre Funktion an folgendem Beispiel: Die Oberfläche A sei eine halbe Kugelschale, also in Winkeln parametrisiert: $\phi \in [0,2\pi]$ und $\theta \in [0,\pi/2]$. Die Dichte sei gegeben als $\sigma(x,y,z) = (x^2+y^2)z$. Zur Kontrolle berechnen Sie das gleiche auch für die konstante Dichte $\sigma \equiv 1$. *Hinweis*: Das Ergebnis ist einmal $\pi/2$, und einmal der Flächeninhalt der Kugelschale, 2π.

(c) Definieren Sie eine Funktion, die für eine Oberfläche A den Fluss einer Flüssigkeit durch sie berechnet, wobei ein Vektorfeld $\vec{V}$ die Geschwindigkeit der Flüssigkeit am jeweiligen Punkt der Oberfläche angibt. Hier tritt das Skalarprodukt von $\vec{V}$ mit dem vektoriellen Flächenelement $\mathrm{d}\vec{A}$ auf.

(d) Als Beispiel betrachten Sie den Fluss beschrieben durch das Vektorfeld $\vec{V} \doteq (3y, -z, x^2)$ durch die Oberfläche, die durch die Parametrisierung $(st, s+t, (s^2-t^2)/2)$ gegeben ist, $(s,t) \in [0,1]\times[0,3]$. *Hinweis*: Das Ergebnis ist -15.

(e) Visualisieren Sie die in (d) gegebene Oberfläche.

Bitte wenden!

[H34*] *Satz von Steiner* **[2* + 2* + 2* = 6* Punkte]**

Man berechne für einen Quader mit den Kantenlängen a, b und c und konstanter Massendichte $\rho(\vec{r}) = \rho_0$ die Komponenten

$$I_{jk} = \int_V \mathrm{d}^3r \;\; \rho(\vec{r}) \; (\vec{r}^2 \, \delta_{jk} \; - \; x_j x_k) \;\; = \;\; \int_V \mathrm{d}^3r \;\; \rho(\vec{r}) \; \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & z^2+x^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{pmatrix}_{j\,k}$$

des Trägheitstensors in Koordinaten längs der Quader-Achsen, und zwar

(a) bezüglich einer Ecke des Quaders, also $V = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$;

(b) bezüglich des Quader-Schwerpunkts, also $V = [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}] \times [-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}] \times [-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}]$.

(c) Die Differenz der beiden Matrizen aus (a) und (b) lässt sich in der Form $M(\vec{d}^2 \delta_{jk} - d_j d_k)$ schreiben. Welche Masse M und welcher Vektor $\vec{d}$ treten hier auf?

Hinweis: Der Tensor in (b) sollte Diagonalgestalt haben. Das Resultat (c) ist ein Beispiel des Satzes von Steiner.

HINWEIS: Name, Vorname, und Matrikelnummer angeben! Lösungen bitte zusammenheften!