Hausübung VII zur Vorlesung MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK WiSe 2014/15

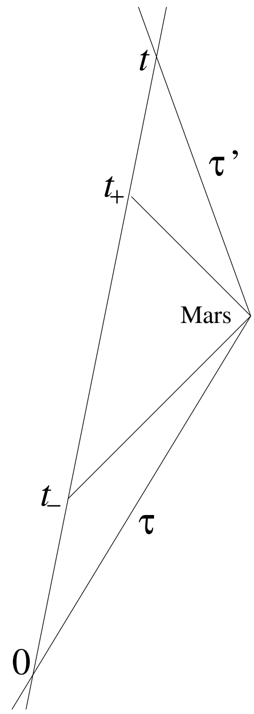
Prof. Dr. Norbert Dragon
PD Dr. Micħael Flohr

Abgabe 02.12.2014 vor der Vorlesung

SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

[H20] *Marsreise* **$[2+2+2+2+1+3 = 12$ Punkte$]$**

Ein Reisender fliegt wie im nebenstehenden Raumzeitdiagramm mit gleichmäßiger Geschwindigkeit v von der Erde zum Mars, kehrt bei der Ankunft augenblicklich um und reist mit ebenfalls konstanter Geschwindigkeit v' zurück. Bestimmen Sie mit dem Dopplerfaktor $k(v) = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}$ die Beziehungen zwischen den folgenden Zeiten:



(a) Zwischen der Hinreisedauer τ, die auf der Uhr des Reisenden vergeht, und der Zeit t_-, die dem Reisenden auf dem Mars die Uhr eines Stubenhockers anzeigt, der auf der Erde verbleibt.

(b) Zwischen der Rückreisedauer τ', die auf der Uhr des Reisenden bei der Rückreise vergeht, und der Zeit $t - t_-$, die er dabei auf der Uhr des Stubenhockers vergehen sieht.

(c) Zwischen der Zeit t_+, zu der der Stubenhocker die Marsankunft sieht, und der Zeit τ, die er dabei auf der Uhr des Reisenden abliest.

(d) Zwischen der Zeit $t-t_+$, die für den Stubenhocker vergeht, während er den Reisenden zurückkommen sieht, und der Zeit τ', die er dabei auf der Uhr des Reisenden ablaufen sieht.

Folgern Sie mit Ihren Ergebnissen weiter:

(e) Wann sind diese Beziehungen paarweise gleich?

(f) Zeigen Sie mit den Dopplerbeziehungen die Relation

$$t = \frac{1}{2}(k + k^{-1})\tau + \frac{1}{2}(k' + k'^{-1})\tau' > \tau + \tau' \,.$$

[H21] *Lorentz-Algebra* **$[2+2+2+2+5+5 = 18$ Punkte$]$**

In [H13] hatten Sie die Generatoren δ_i, $i = 1,2,3$, von Drehungen um die Achsen $\vec{e}_i$ bestimmt und gezeigt, dass diese die Algebra $[\delta_i, \delta_j] = \varepsilon_{ijk}\delta_k$ erfüllen. Denken Sie sich im folgenden die δ_i als 4×4-Matrizen, bei denen eine nullte Zeile und nullte Spalte mit Nullen hinzugefügt wurde, also

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie Matrizen $L_{v\vec{e}_i}$ für Lorentz-Schübe (Geschwindigkeit v) in Richtungen $\vec{e}_i$ an, $i = 1,2,3$.

(b) Berechnen Sie daraus die Generatoren $\lambda_i = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} L_{v\vec{e}_i}\right|_{v=0}$.

(c) Berechnen Sie die Kommutatoren $[\lambda_i, \lambda_j]$. Drücken Sie diese durch die Generatoren δ_k und λ_k aus.

(d) Berechnen Sie abschließend die Kommutatoren $[\delta_i, \lambda_j]$ und drücken Sie diese durch die Generatoren δ_k und λ_k aus.

Endliche Transformationen sind dann gegeben als $D_{\alpha\vec{e}_i} = \exp(\alpha\delta_i)$ und $L_{v\vec{e}_i} = \exp(v\lambda_i)$. Hierbei ist die Exponentialfunktion zu verstehen als die Reihenentwicklung

$$\exp(t\,A) = \mathbb{1} + t\,A + \frac{1}{2}\,t^2\,A^2 + \ldots$$

für eine Matrix A. Außerdem gilt näherungsweise für zwei Matrizen A, B die Formel

$$\exp(t\,A)\exp(t\,B) = \exp(t\,A + t\,B + \frac{1}{2}\,t^2\,[A,B])$$

bis einschließlich zur Ordnung t^2. Das ist die *Baker-Campbell-Hausdorff-Formel*.

(e) Überprüfen Sie dies explizit für $A = \alpha\delta_1$ und $B = \beta\delta_2$. *Hinweis*: Für kleine Drehungen ergibt dies das Produkt $D_{t\alpha\vec{e}_1} D_{t\beta\vec{e}_2}$ von zwei Drehungen um die zwei *verschiedenen* Achsen $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$.

(f) Was erhalten Sie für den Fall $A = u\lambda_1$ und $B = v\lambda_2$?

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe (Nummer und Name des Tutors) an! Lösungen unbedingt zusammenheften!