Mic$\hbar$ael Flohr
Andre Fischer
Fourier-Transformation
Abgabe: 26. Oktober 2007

Die folgenden Übungen behandeln die Fourier-Transformation. Diese spielt in der Quantenmechanik eine ganz wichtige Rolle. Mit ihr kann man Betrachtungen im Ortsraum (Teilchen-Charakter) und Betrachtungen im Impulsraum (Wellen-Charakter) ineinander umrechnen.

1. *Fourier-Reihen*: Auf der Menge der differenzierbaren Funktionen $f\colon [-L, L] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definieren wir ein Skalarprodukt durch
$$\langle f|g\rangle := \int_{-L}^{L} f^*(x)g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$
Für $n \in \mathbb{Z}$ und $x \in [-L, L]$ sei $w_n(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/L}$.

   (a) Berechnen Sie $\langle w_n|w_m\rangle$. **[2P]**

   (b) Die w_n bilden eine Basis auf dem Raum der Funktionen f mit den obigen Eigenschaften. Eine solche Funktion f hat die Basisentwicklung
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n w_n(x)\,, \qquad f_n \in \mathbb{C}\,.$$
Zeigen Sie die Gleichung
$$f_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} w_n^*(x)f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$
[1P]

   (c) Beweisen Sie die Relation
$$\langle f|f\rangle = 2L \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2\,.$$
[1P]

2. *Fourier-Integrale*: In dieser Aufgabe soll heuristisch begründet werden, warum ähnliche Formeln für Fourier-Integrale durch einen Grenzübergang aus denen für Fourier-Reihen gewonnen werden können. Dazu setzen wir
$$k_n = n\frac{\pi}{L}\,, \quad \Delta k = \frac{\pi}{L}\,, \quad \frac{L}{\pi}f_n = \frac{\tilde{f}(k_n)}{\sqrt{2\pi}}\,.$$
Zeigen Sie: Falls man in guter Näherung
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(k)\,\mathrm{d}k \approx \int_{-L}^{L} g(k)\,\mathrm{d}k \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(k_n)\Delta k$$
setzen kann (für großes L), so gehen die Gleichungen in Aufgabe II.1.b und II.1.c über in die Entwicklung
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$$
einer quadratintegrablen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit Umkehrformel (Fourier-Integralsatz)
$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x$$

unter Erhaltung der Norm,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 \mathrm{d}k\,. \qquad \textbf{[6P]}$$

3. *Anwendung*: Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Falls der Zusammenhang zwischen f_1 und $\tilde{f}_1$ und zwischen f_2 und $\tilde{f}_2$ durch den Fourier-Integralsatz gegeben ist, ergibt die Polarisationsformel aus Aufgabe (I.2) für die Skalarprodukte die Beziehung

   $$\int_{-\infty}^{\infty} f_1^*(x) f_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_1^*(k)\tilde{f}_2(k)\,\mathrm{d}k\,. \qquad \textbf{[2P]}$$

   (b) Ist $f_2(x) = x f_1(x)$, so gilt $\tilde{f}_2(k) = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial k}\tilde{f}_1(k)$. **[1P]**

   (c) Es gilt

   $$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}^*(k)\,\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial k}\tilde{f}(k)\,\mathrm{d}k\,. \qquad \textbf{[1P]}$$

   (d) Analog gilt

   $$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}^*(k)\Big(-\frac{\partial^2}{\partial k^2}\Big)\tilde{f}(k)\,\mathrm{d}k\,. \qquad \textbf{[1P]}$$