Übungsblatt II — QUANTENMECHANIK I — Prof. Norbert Dragon

Präsenzübungen — 10. und 11. April 2001

[P1] Betrachten Sie die folgenden drei Matrizen, denen Sie in Zukunft noch häufiger begegnen werden:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrizen heißen die *Pauli-Matrizen* und sind für die Beschreibung von Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen wichtig. Die zugehörigen Spin-Operatoren sind dann als $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$ gegeben. Berechnen Sie für alle drei Matrizen Eigenwerte und Eigenvektoren. Finden Sie die Eigenwerte der Matrix $n^i\sigma_i$ für beliebige Einheitsvektoren $\boldsymbol{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)^t$. Zeigen Sie, daß der Vektor

$$\chi = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\exp(-\mathrm{i}\frac{\phi}{2}) \\ \sin\frac{\theta}{2}\exp(+\mathrm{i}\frac{\phi}{2}) \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor zu $n^i\sigma_i$ ist. Vergleichen Sie die speziellen Fälle $\phi = 0$ und $\phi = 2\pi$. Zeigen Sie ferner, daß jeder *normierte* Vektor $\chi' \in \mathbb{C}^2$ bis auf eine Phase die Form von χ hat. Ist diese Phase relevant?

Berechnen Sie sämtliche neun Matrix-Produkte $\sigma_i\sigma_j$. Damit können Sie sofort zeigen, daß die oben definierten Spin-Operatoren die Drehimpuls-Algebra erfüllen, d.h.

$$[S_i, S_j] = \mathrm{i}\,\hbar\,\epsilon_{ijk}\,S_k\,.$$

Weiterhin interessant ist die Algebra $\{\sigma_i, \sigma_j\}$, die Sie natürlich ebenfalls von Ihrer Liste der neun Produkte ablesen können. Hierbei sind $[A, B] = AB - BA$ und $\{A, B\} = AB + BA$.

[P2] Der Translationsoperator T_a ist definiert durch

$$T_a\psi(x) = \psi(x-a)\,.$$

Zeigen Sie, daß dies ein unitärer Operator ist.

[P3] Die Fouriertransformation ist gegeben durch

$$\mathcal{F}[\psi(x)](k) = \widetilde{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\psi(x)\,.$$

Mit dieser Definition gilt $\mathcal{F}[\mathcal{F}[\psi]](x) = \psi(-x)$. Zeigen Sie, daß $\mathcal{F}$ unitär ist. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned}
\psi(x) = \psi^*(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad \widetilde{\psi}^*(k) = \widetilde{\psi}(-k)\,,\\
\mathcal{F}[\psi(x-x_0)](k) \quad &= \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_0}\widetilde{\psi}(k)\,,\\
\mathcal{F}[x\psi(x)](k) \quad &= \quad \mathrm{i}\partial_k\widetilde{\psi}(k)\,,\\
\mathcal{F}[\partial_x\psi(x)](k) \quad &= \quad \mathrm{i}k\widetilde{\psi}(k)\,,\\
\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\, f(y)g(x-y) \quad &\Longrightarrow \quad \mathcal{F}[\psi(x)](k) = \sqrt{2\pi}\widetilde{f}(k)\widetilde{g}(k)\,.
\end{aligned}$$

Die letzte Eigenschaft wird auch als *Faltungstheorem* bezeichnet. Berechnen Sie explizit die Fouriertransformationen für folgende Funktionen:

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \delta(x-x_0)\,,\\
\psi(x) &= \sqrt{a}\,\mathrm{e}^{-a|x|} \quad \text{mit} \quad a > 0\,,\\
\psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\Theta(x+\frac{a}{2}) - \Theta(x-\frac{a}{2})\right)\,.
\end{aligned}$$

[H1] Betrachten Sie ein System in einem Kasten der Länge L. Da die Wellenfunktionen außerhalb des Kastens verschwinden müßen, sieht das Skalarprodukt nun wie folgt aus:

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x \, \overline{\phi(x)} \psi(x) \, .$$

Betrachten Sie weiter für $n > 0$ und ganzzahlig die Funktionen $\phi_n(x) = \sqrt{2/L} \sin(n\pi x/L)$ für n gerade, und $\phi_n(x) = \sqrt{2/L} \cos(n\pi x/L)$ für n ungerade. Dies sind Ortsraumdarstellungen von Zuständen $|\phi_n\rangle$. Prüfen Sie nach, daß

$$\langle \phi_n | \phi_m \rangle = \delta_{n,m}$$

gilt. Betrachten Sie die Funktion $\psi(x) = \alpha(L^2/4 - x^2)$. Bestimmen Sie α so daß $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ gilt. Zeichnen Sie $\psi(x)$ für das von Ihnen gefundene α und ein paar der Funktionen $\phi_n(x)$. Was ist $\langle \phi_{2n} | \psi \rangle$? Berechnen Sie $\langle \phi_1 | \psi \rangle$ und $\langle \phi_3 | \psi \rangle$ für das von Ihnen gefundene α.

Mit diesen Rechnungen können Sie nun folgenden Sachverhalt einsehen: Mit der Abkürzung $\langle \phi_n | \psi \rangle = c_n$ läßt sich die N-te Approximation von $\psi(x)$ durch die $\phi_n(x)$ schreiben als

$$\psi_N(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n(x) \, .$$

Zeigen Sie, daß der Fehler $|\psi(x) - \psi_N(x)|^2$ für anwachsendes N monoton gegen null geht. (5 P.)

[H2] Der Hamiltonoperator eines Zweizustandssystems sei in einer Orthonormalbasis durch die Matrix

$$(H_{ij}) = \langle \Lambda_i | H | \Lambda_j \rangle = -g\mu B\hbar \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & (1-\mathrm{i})/2 \\ (1+\mathrm{i})/2 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Eigenwerte E_i und Eigenvektoren χ_i von H. Das System befinde sich im Zustand

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad |\psi\rangle = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}} |\Lambda_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |\Lambda_2\rangle \, .$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $w(E_i, \Psi) = |\langle \Psi | \chi_i \rangle|^2$, bei einer Energiemessung den ersten oder den zweiten Energiewert zu finden. Berechnen Sie daraus den Erwartungswert $\langle H \rangle \equiv \langle \Psi | H | \Psi \rangle$ und die Varianz

$$\Delta H \equiv \sqrt{\left\langle (H - \langle H \rangle)^2 \right\rangle} \, .$$

Die Varianz wird auch als Schwankung oder Unschärfe bezeichnet. (5 P.)