# Über drei Ecken zu Einstein

Norbert Dragon
Hannover
6. Februar 2009

Raumzeit, Weltlinien, Lichtkegel

Relativitätsprinzip

Gleichzeitig und Gleichortig

Dopplereffekt, Schiedsrichter

Satz des Minkowski (Pythagoras)

Altern von Zwillingen

Verkürzung bewegter Maßstäbe

Mit $v = 0{,}97\,c$ durch Stonehenge

www.itp.uni-hannover.de/~dragon

# Raumzeit, Weltlinien, Lichtkegel

Ereignisse werden wie Verabredungen durch Zeit und Ort angegeben.

Grundrisse und Querschnitte verdeutlichen höherdimensionale Zusammenhänge.

Geschichte eines Teilchens: Weltlinie (Fahrplan)

Schnittpunkt zweier Weltlinien: Treffen zweier Teilchen, Empfangen und Aussenden von Licht

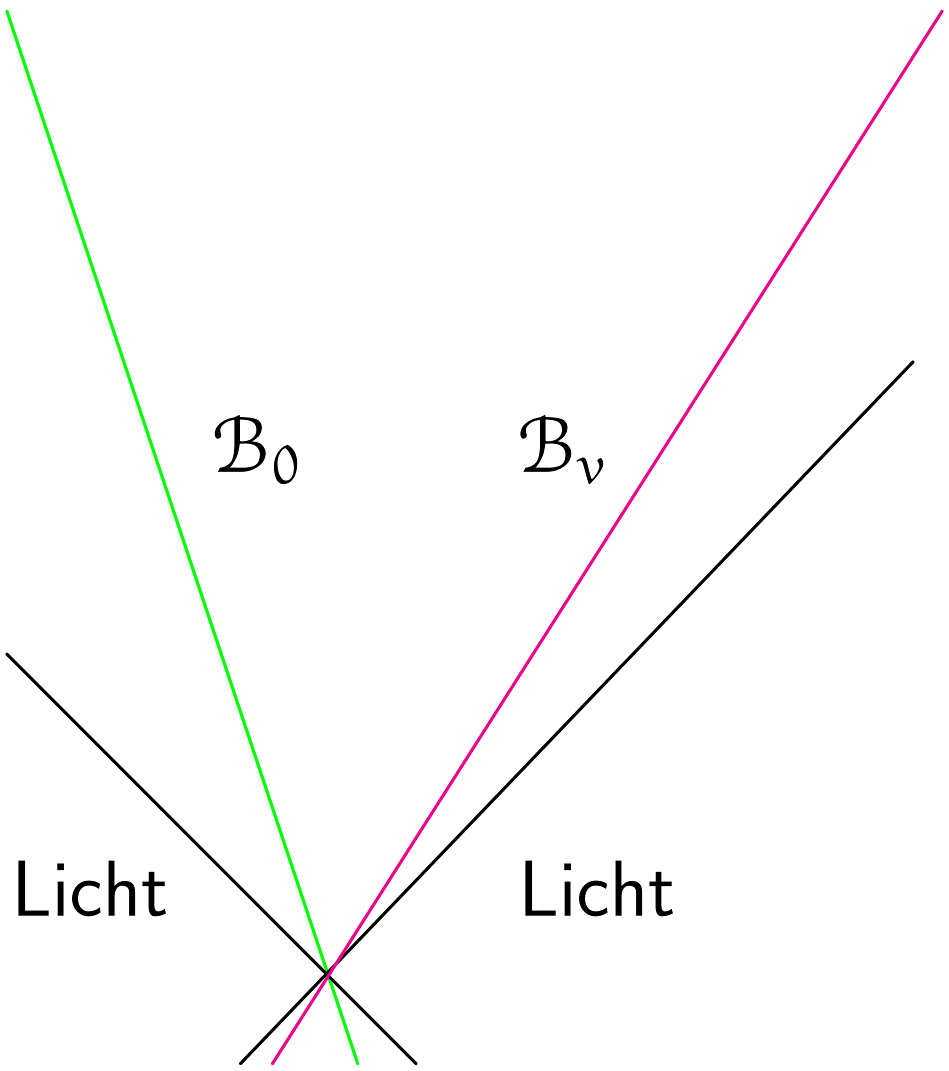
Freies Teilchen: gerade Weltlinie (keine Gravitation)

Nichts überholt Licht, Licht überholt nicht Licht: parallele Weltlinien

Lichtkegel: die Weltlinien der in einem Ereignis ein- und auslaufenden Lichtpulse

1 Sekunde $=$ 299 792 458 Meter    1 Fuß $= 1{,}646 \cdot 10^{-4}$ nautische Meilen

# Relativitätsprinzip




Die Lichtgeschwindigkeit ist unabhängig von der Quelle (Supernova 1987a).

Ruhe ist nicht von gleichförmiger Bewegung unterscheidbar:

Die Lichtgeschwindigkeit ist für alle gleichförmig bewegte Beobachter gleich (Michelson, Morley).

## Geometrische Strukturen und Invarianzen

Gerade Weltlinien gleichförmig bewegter Beobachter

Lichtkegel jedes Ereignisses (wie Rillen einer Schallplatte)

Zeit längs Weltlinien: Länge in der Raumzeit

Verschiebung: kein Ort und keine Zeit ausgezeichnet

Drehung: keine Richtung ausgezeichnet

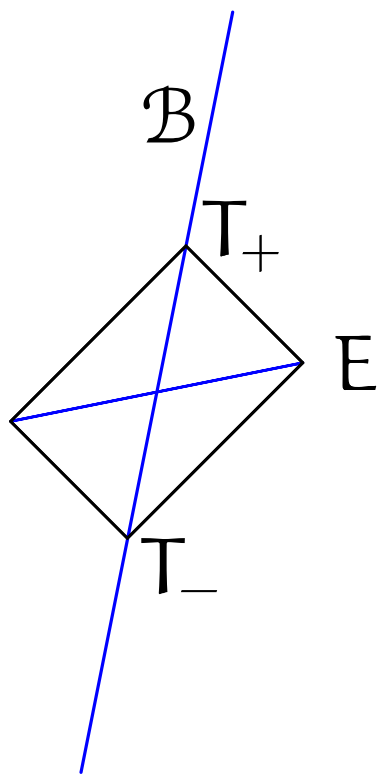
Bewegung: keine gleichförmige Geschwindigkeit $|v| < c$ ausgezeichnet

## Nicht vorhandene geometrische Strukturen

Keine Weltlinien absoluter Ruhe: wie in Newtonscher Physik

Keine Weltlinien absoluter Gleichzeitigkeit: anders als Newton dachte

# Ort und Zeit eines entfernten Ereignisses




## Radar

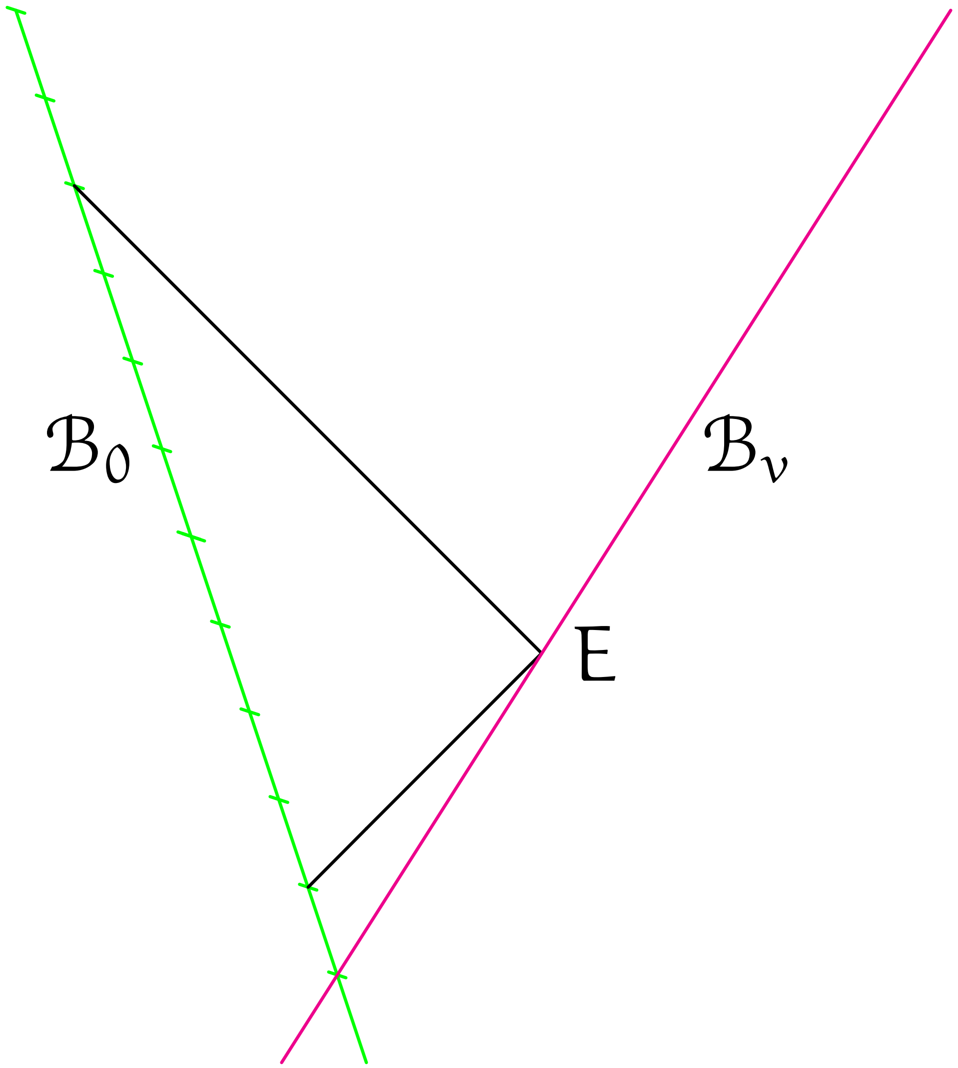
$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{T}_+ - \mathbf{T}_-}{2} \qquad \mathbf{t} = \frac{\mathbf{T}_+ + \mathbf{T}_-}{2}$$

$$\mathbf{T}_+ = \mathbf{t} + \mathbf{r} \qquad \mathbf{T}_- = \mathbf{t} - \mathbf{r}$$

Gleichzeitige und gleichortige Diagonalen im Lichteck

Gleichzeitigkeit und Gleichortigkeit hängen von der Weltlinie des Beobachters ab, ebenso wie in Euklidischer Geometrie von einer Geraden abhängt, welche Geraden dazu senkrecht oder parallel sind.

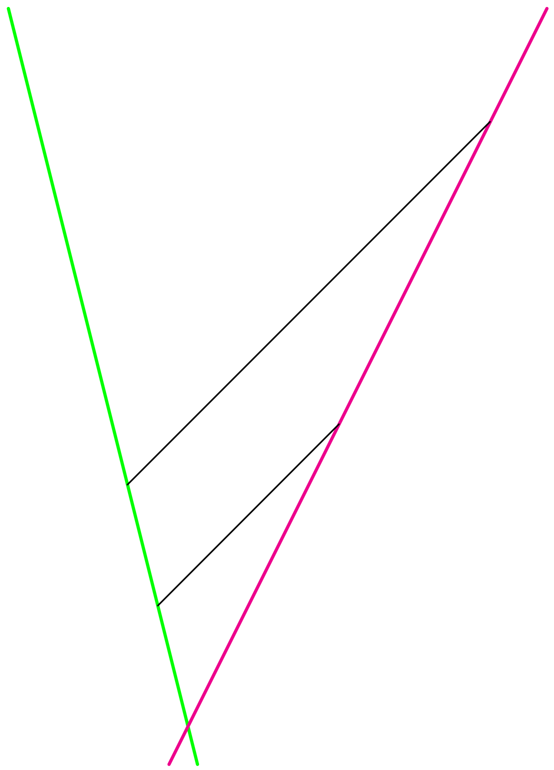
# Beispiel einer Entfernungs- und Geschwindigkeitsbestimmung




$r = 4$ Lichtjahre

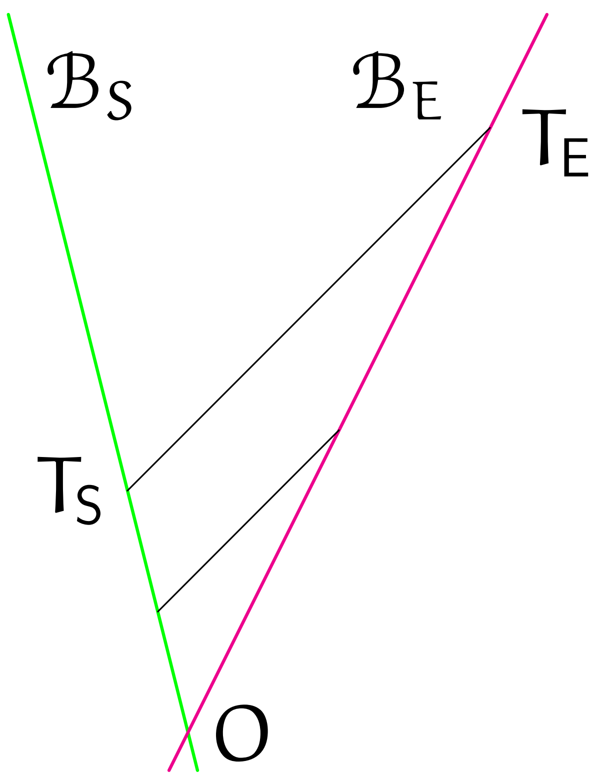
$$v = \frac{4}{5}\,c$$

# Gleichmäßige Uhren auf geraden Weltlinien



# Strahlensatz

Gleichmäßige Uhren auf geraden Weltlinien

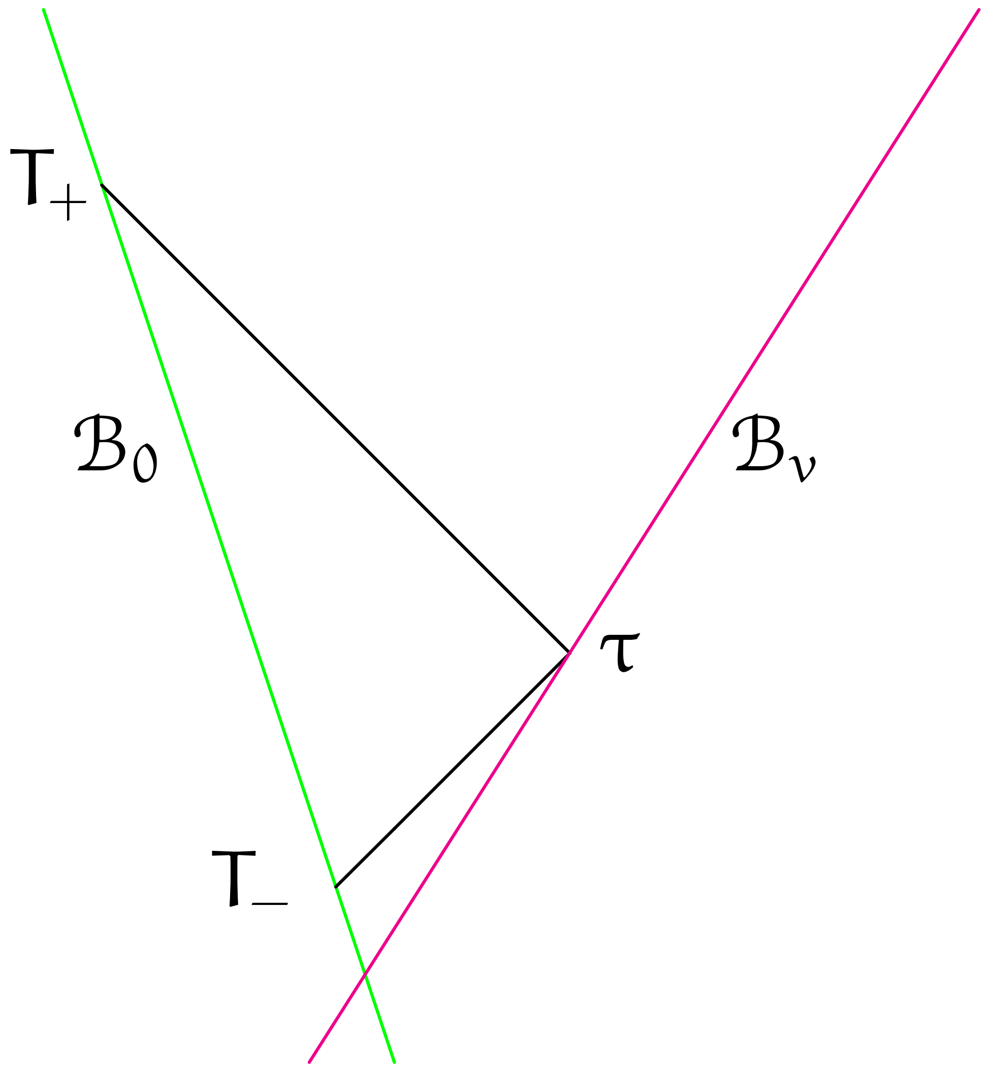



$$T_E = k(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_S)\, T_S$$

Dopplereffekt

$$f_E = \frac{1}{k(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_S)}\, f_S$$

# Dopplerfaktor bei Reflektion



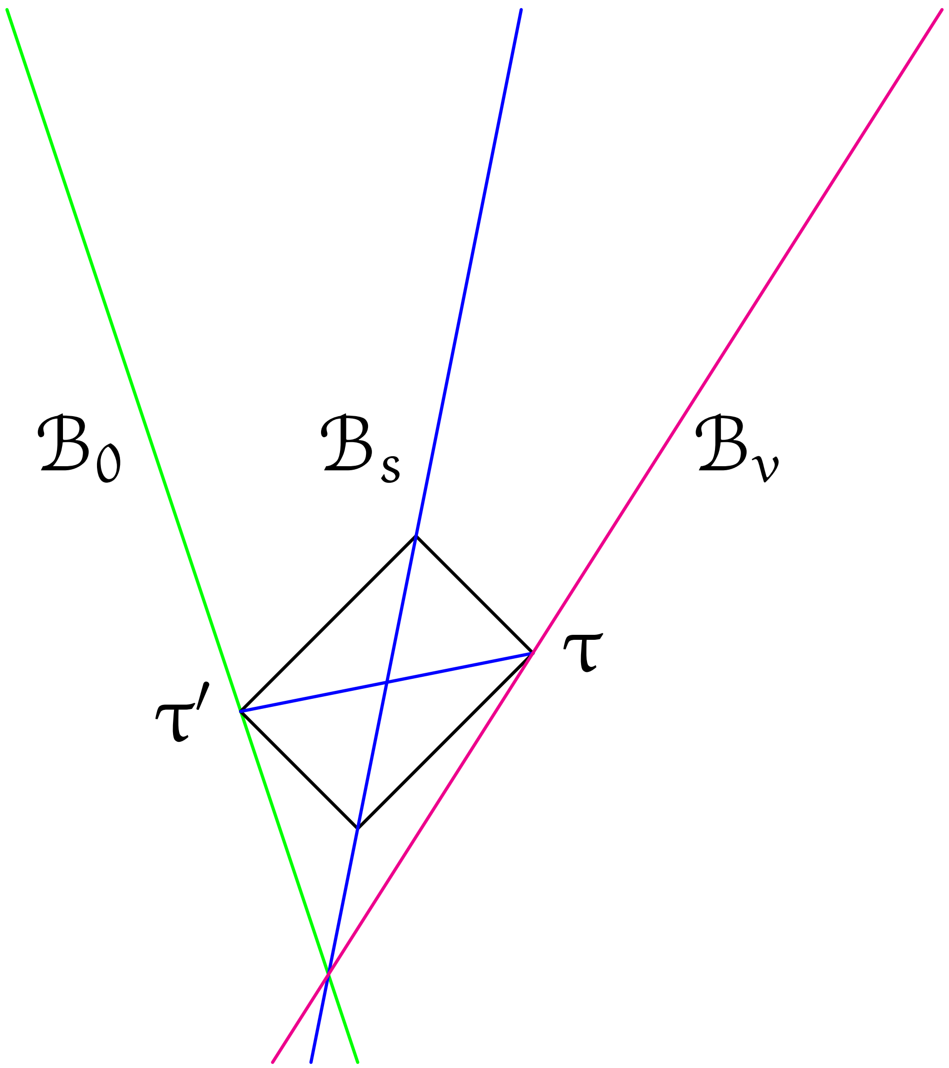

$$\tau = k(\mathcal{B}_v, \mathcal{B}_0)\, T_-$$

$$T_+ = k(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_v)\, \tau$$

$$T_+ = k(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_v)\, k(\mathcal{B}_v, \mathcal{B}_0)\, T_-$$

Dopplerfaktoren multiplizieren sich.

# Gleiche Uhren



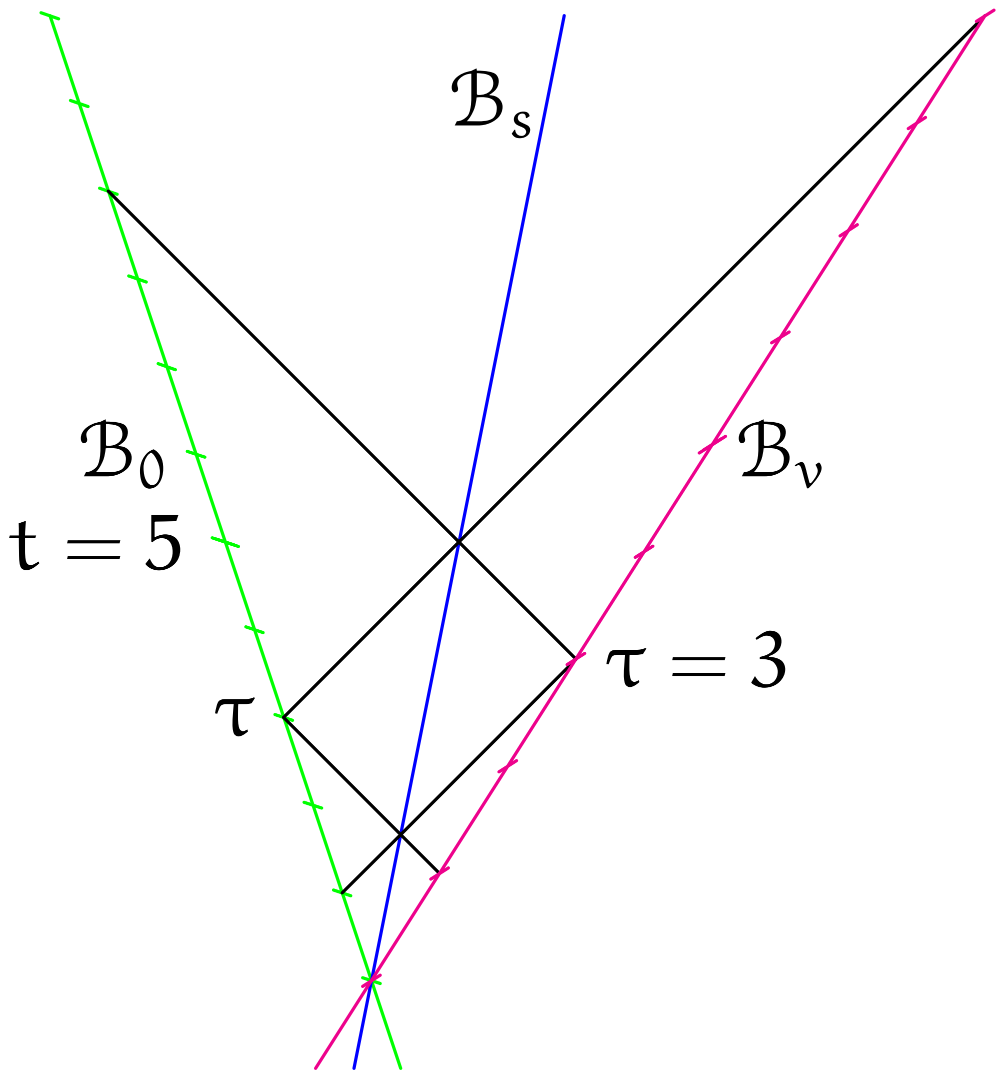

$$x_s(\mathcal{B}_v) = -x_s(\mathcal{B}_0)$$

$$\tau' = \tau$$

Der Schiedsrichter prüft gleichen Uhrgang, also gleiche Länge in der Raumzeit, so wie in Euklidischer Geometrie der Zirkel.

Die Weltlinie des Schiedsrichters zwischen zwei Uhren entspricht der Winkelhalbierenden.

# Beispiel eines Uhrenvergleichs




$$v(\mathcal{B}_v, \mathcal{B}_0) = v(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_v) = \frac{4}{5}\,c$$

$$k(\mathcal{B}_v, \mathcal{B}_0) = k(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_v) = 3$$

Geschwindigkeit und Dopplerverschiebung sind wechselseitig.

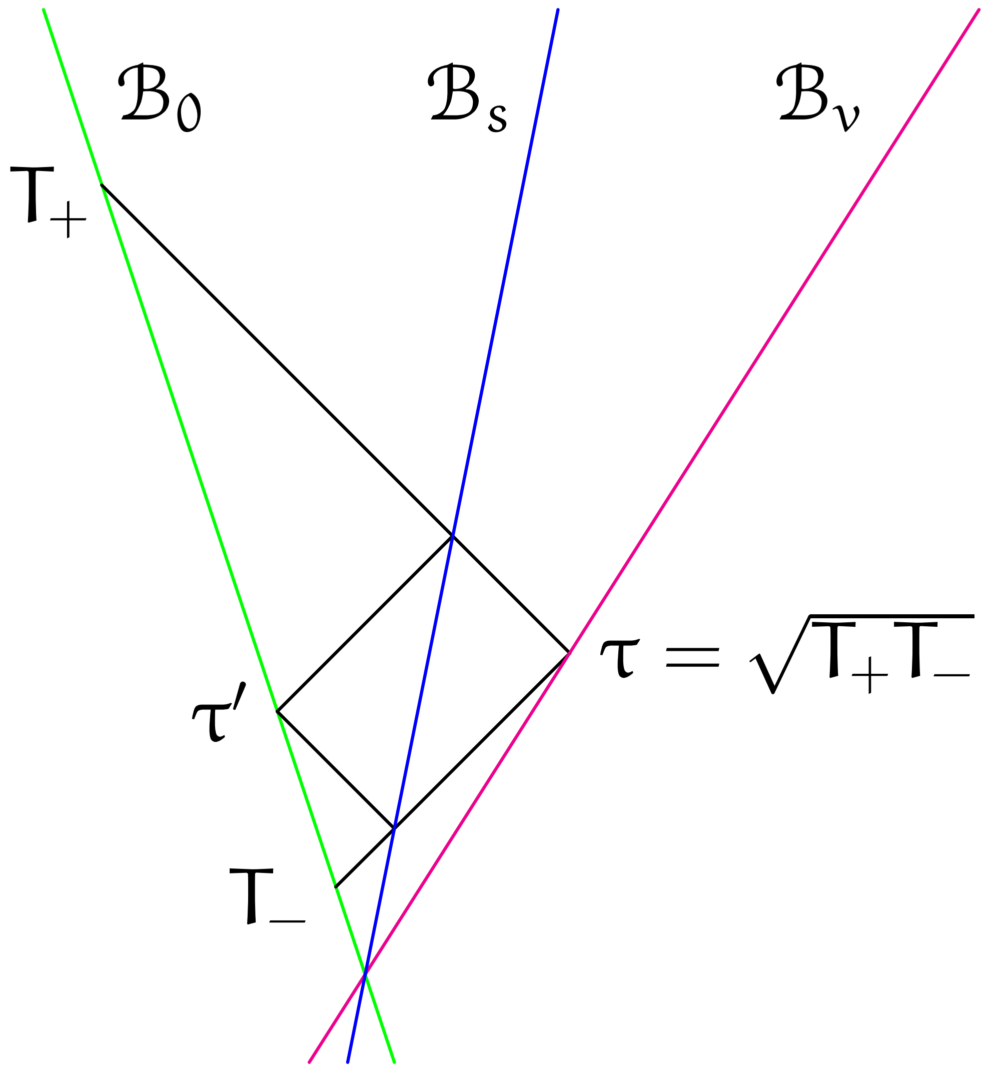
$$v(\mathcal{B}_s, \mathcal{B}_0) = v(\mathcal{B}_s, \mathcal{B}_v) = \frac{1}{2}\,c$$

Geschwindigkeiten sind nicht additiv.

$$\tau = \frac{3}{5}\,t$$

Bewegte Uhren gehen wechselseitig langsamer.

# Satz des Minkowski




$$\frac{\tau'}{T_-} = \frac{T_+}{\tau'}$$

$$\tau' = \tau$$

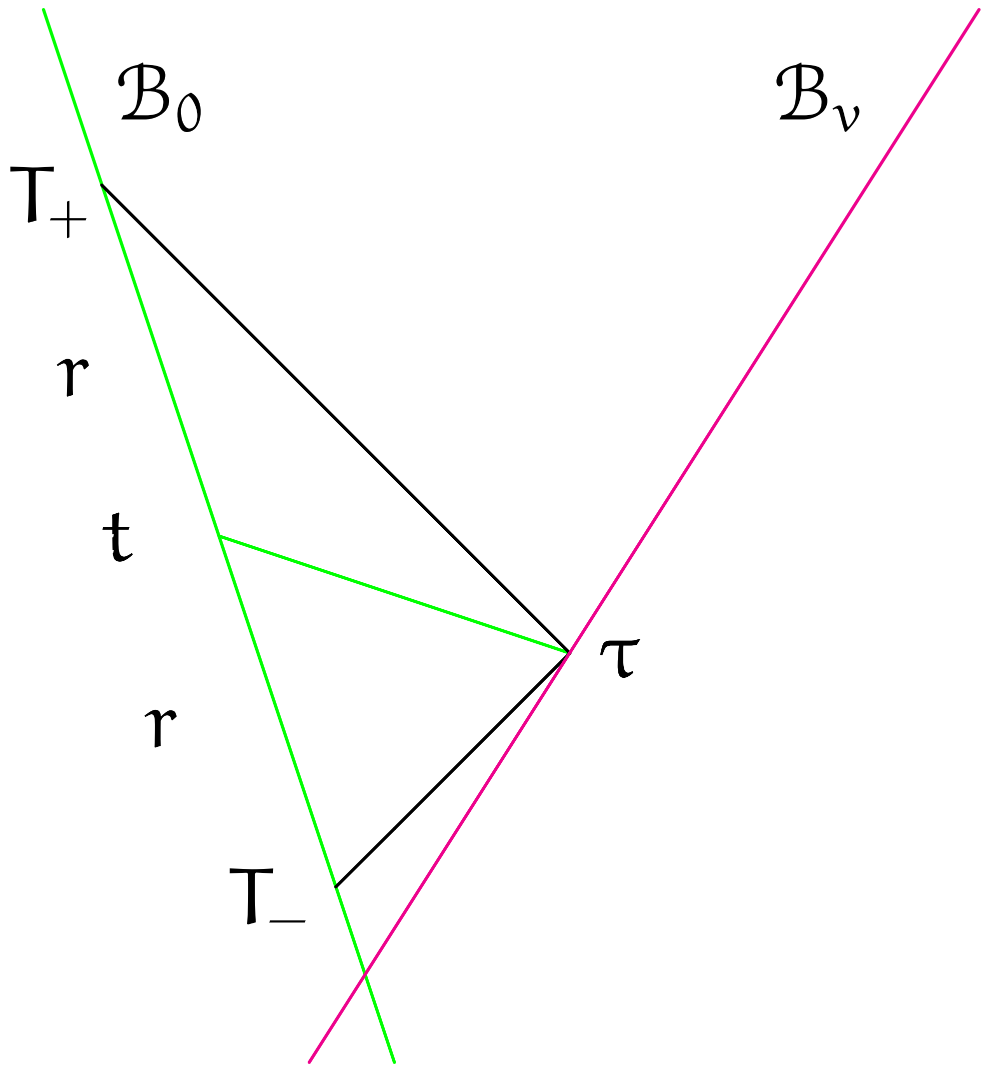
$$\tau^2 = T_+ T_- = t^2 - r^2$$

$$v = \frac{r}{t}$$

$$\tau = \sqrt{1 - v^2}\, t$$

Das geometrische Mittel $\tau = \sqrt{T_+\, T_-}$ ist kleiner als das arithmetische Mittel $t = (T_+ + T_-)/2$, bewegte Uhren gehen langsamer.

# Dopplerfaktor und Geschwindigkeit




$$\frac{\tau}{T_-} = \frac{T_+}{\tau}$$

$$k(\mathcal{B}_v, \mathcal{B}_0) = k(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_v)$$

$$T_+ = k\,\tau = k^2\,T_-$$

$$k^2 = \frac{T_+}{T_-} = \frac{t+r}{t-r} = \frac{1+r/t}{1-r/t}$$

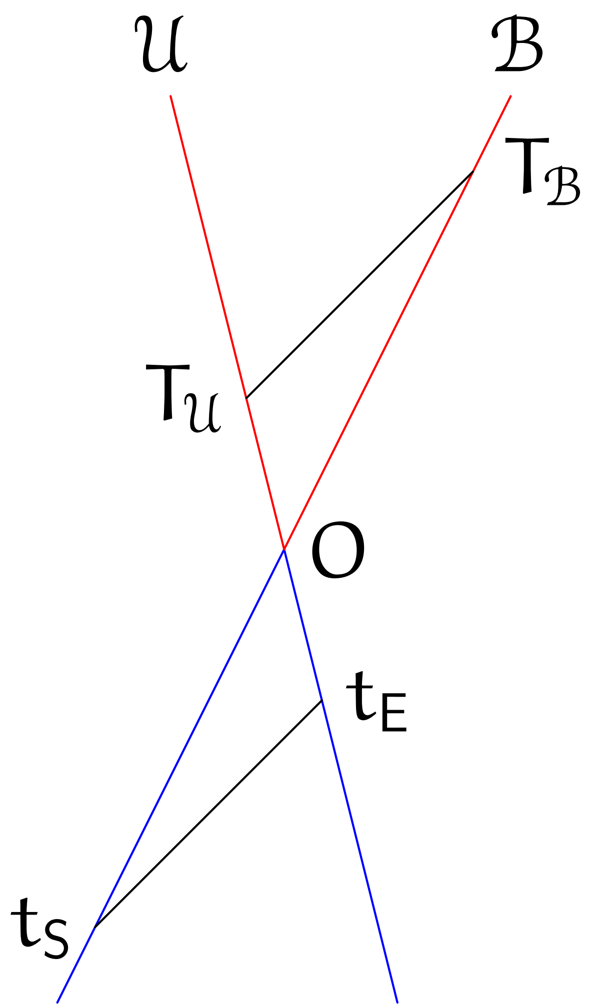
$$k = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} = \frac{1+v}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$k(-v) = \frac{1}{k(v)}$$

Bei gleichen Uhren ist der Dopplerfaktor wechselseitig.

Rotverschiebung beim Wegfliegen ist invers zur Blauverschiebung beim Aufeinanderzufliegen.

# Aufeinander zu und voneinander weg




$$t_E = -T_{\mathcal{U}}$$

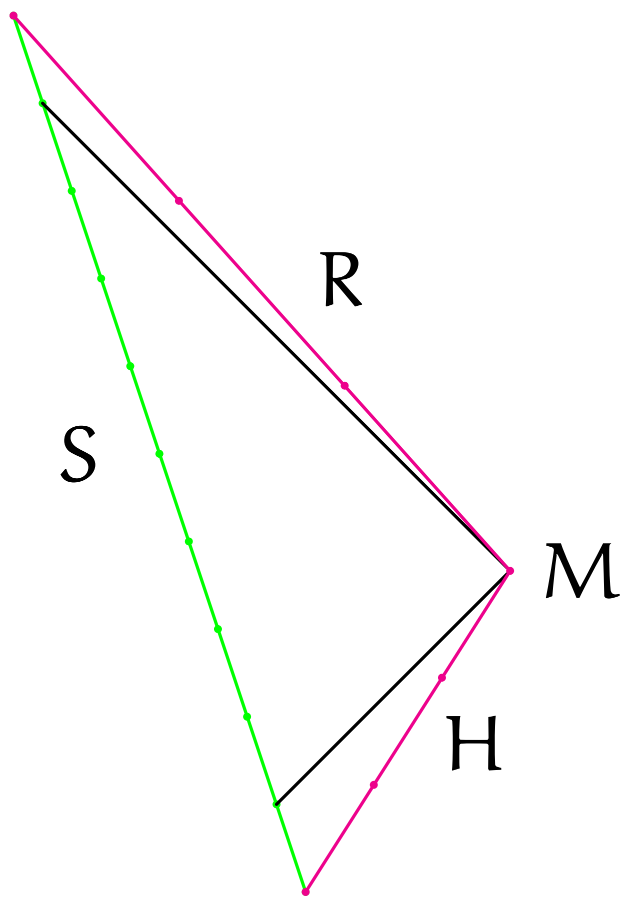
$$t_S = -T_{\mathcal{B}}$$

$$k = \frac{T_{\mathcal{B}}}{T_{\mathcal{U}}}$$

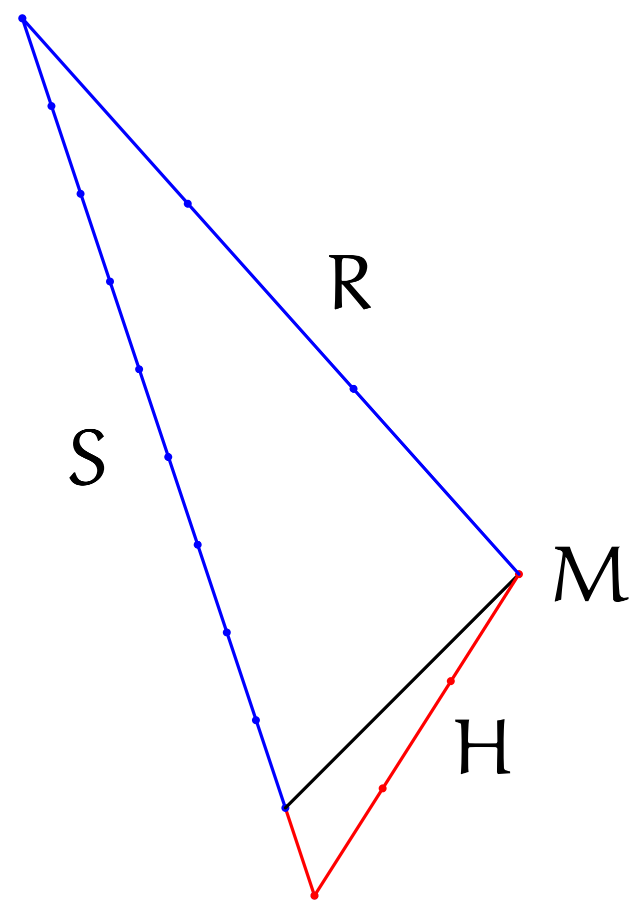
$$\frac{t_E}{t_S} = \frac{1}{k}$$

Rotverschiebung beim Wegfliegen ist invers zur Blauverschiebung beim Aufeinanderzufliegen.

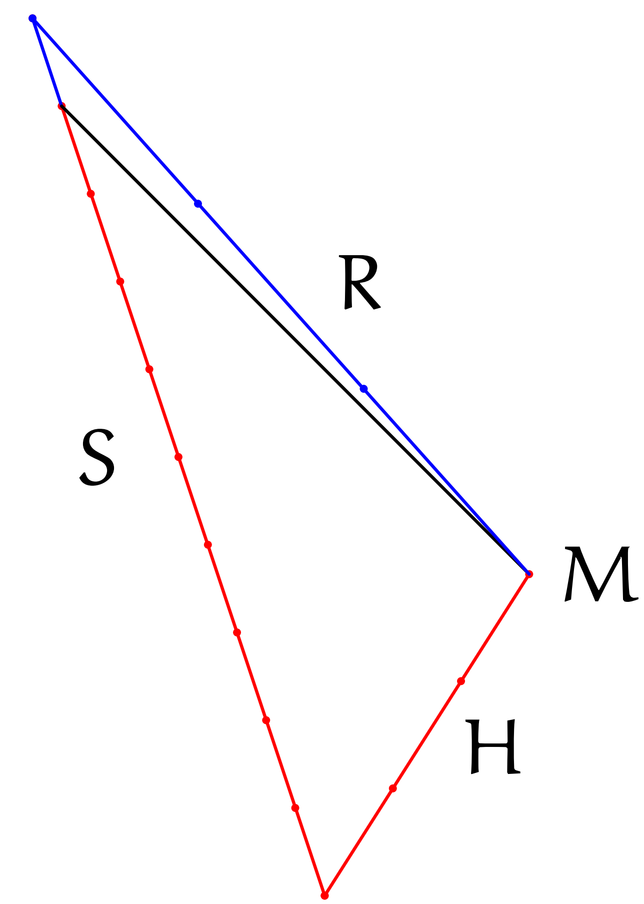
# Altern von Zwillingen




Reise mit $v = \frac{4}{5}\,c$

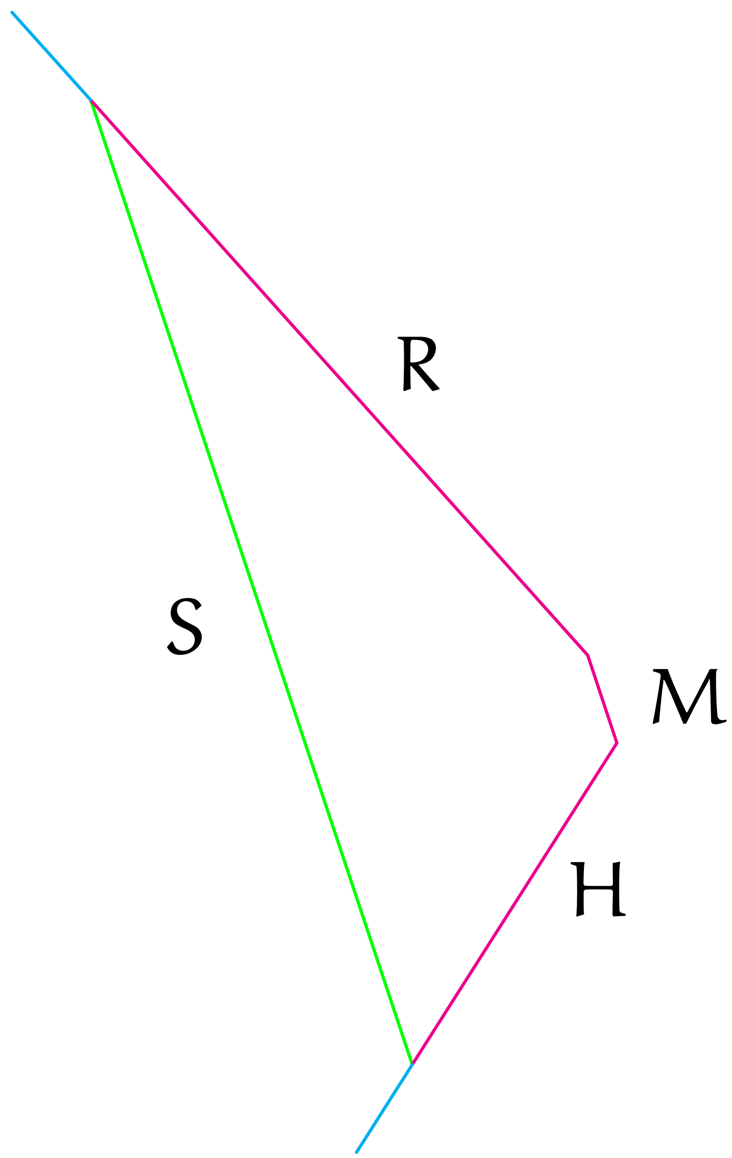



vom Reisenden gesehen



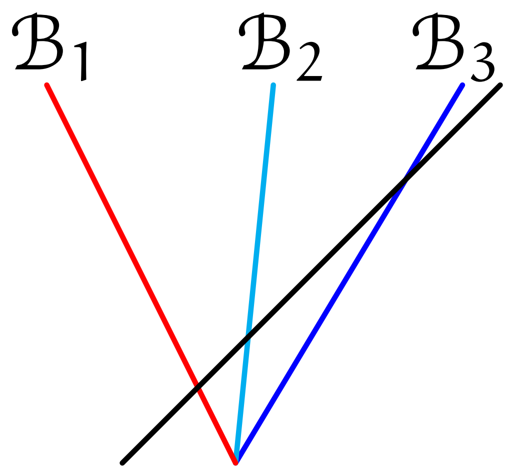

Sicht des Stubenhockers

# Gleiche Beschleunigungsphasen




Auch bei gleichen Beschleunigungsphasen können sich Zwillinge unterschiedlich bewegen und unterschiedlich altern.

# Addition kolinearer Geschwindigkeiten




$$T_2 = k_{21} T_1 \quad T_3 = k_{32} T_2 \quad T_3 = k_{31} T_1$$

$$k_{31} = k_{32} * k_{21}$$

Dopplerfaktoren multiplizieren sich.

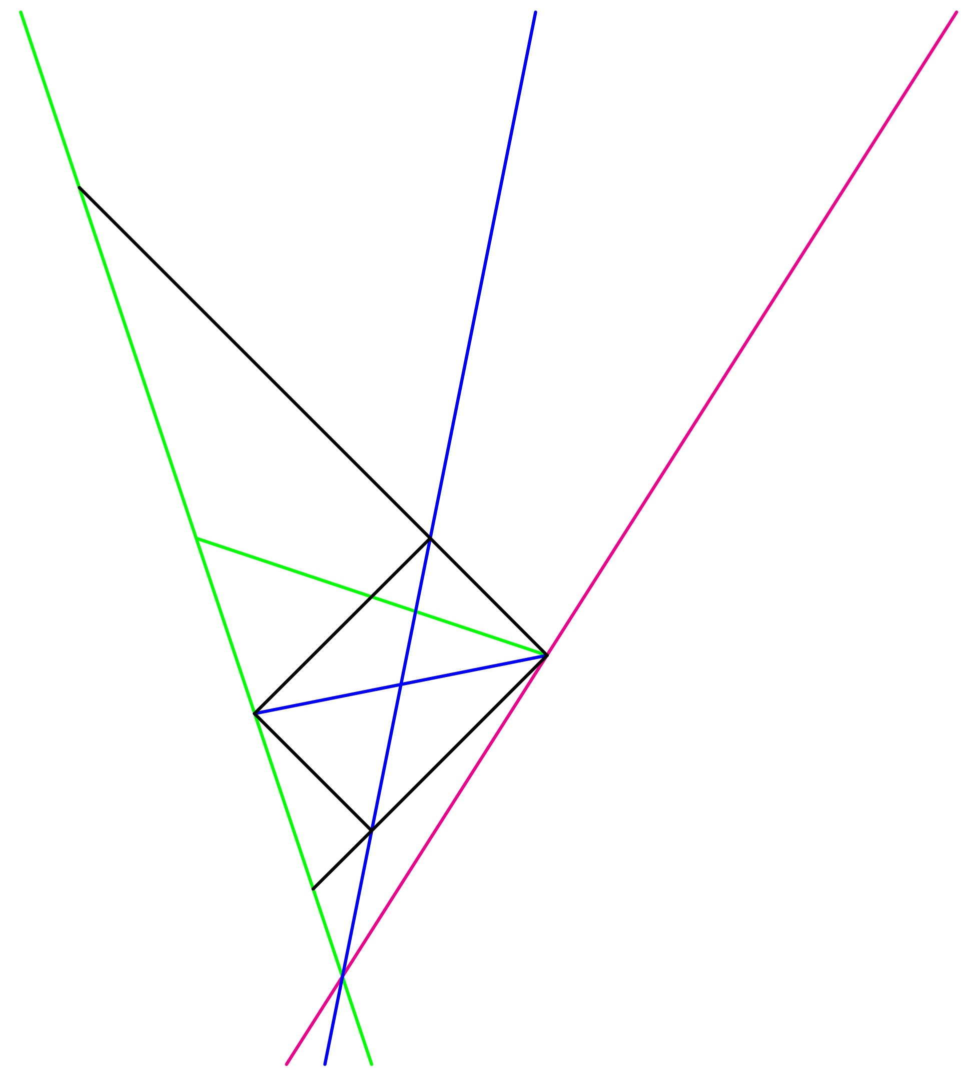
$$v_{31} = \frac{v_{32} + v_{21}}{1 + v_{32} v_{21}}$$

Die Geschwindigkeit $v$ ist, wie in Euklidischer Geometrie die Steigung, nicht additiv.

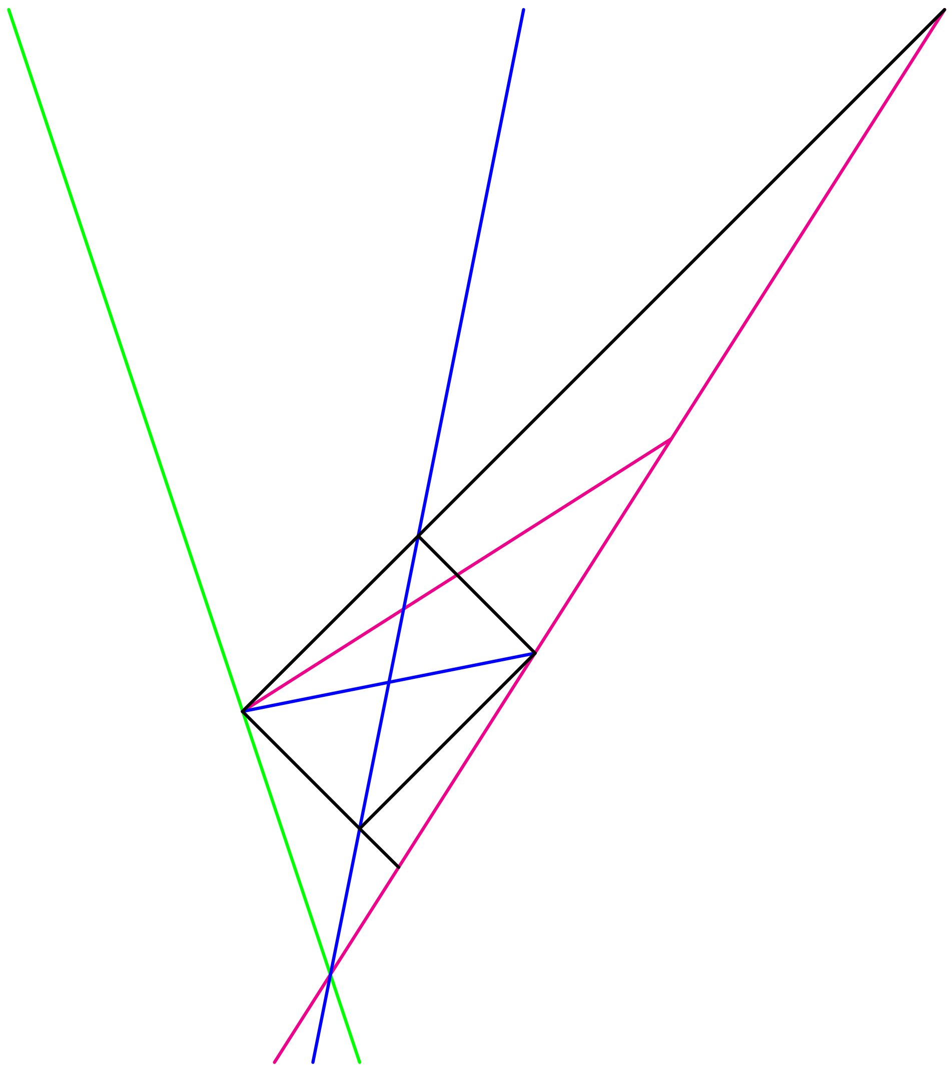
$$\text{Dopplerfaktor} = e^{\text{Schnelligkeit}} \,, \quad k = e^{\sigma} \,, \quad \sigma = \frac{1}{2} \ln \frac{1+v}{1-v}$$

Die Schnelligkeit $\sigma$ ist wie in Euklidischer Geometrie der Winkel additiv.

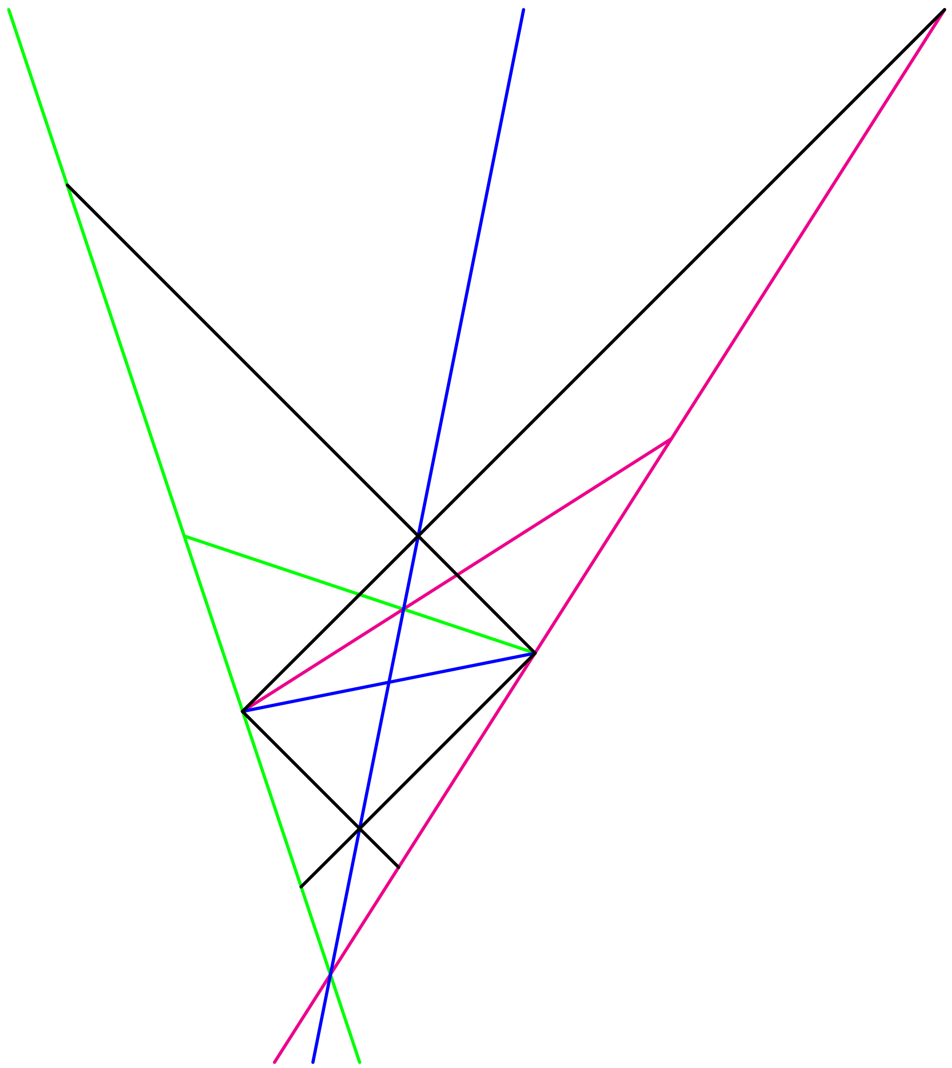
# Zeitdilatation ist gegenseitig



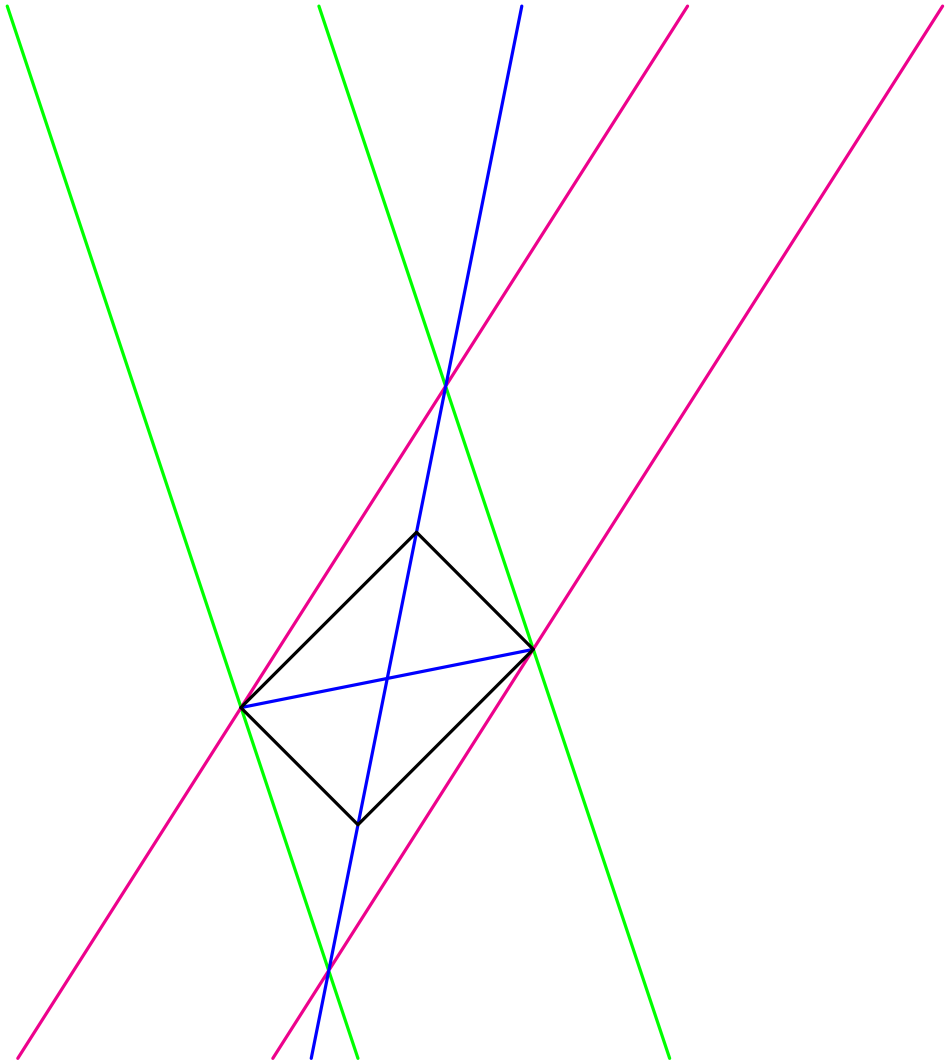
# Zeitdilatation ist gegenseitig



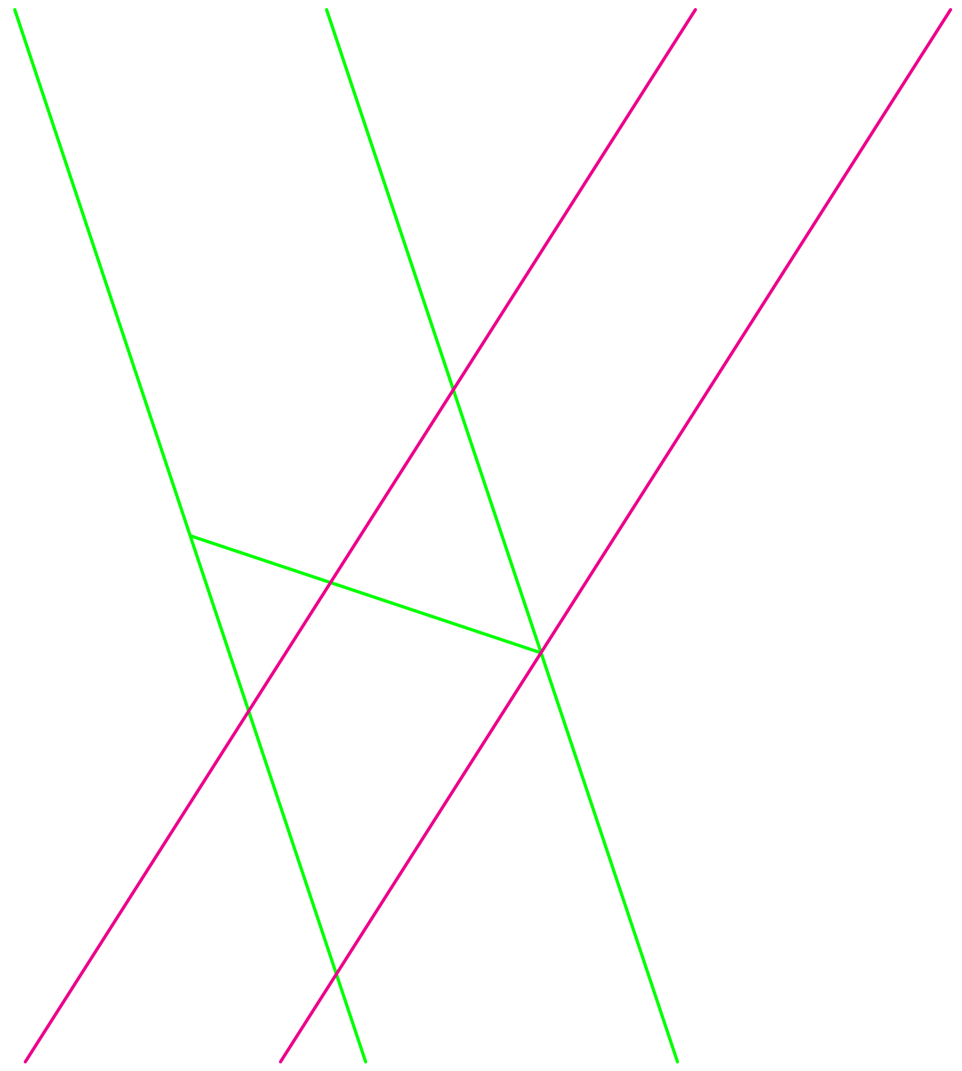
# Zeitdilatation ist gegenseitig



# Gleiche Maßstäbe

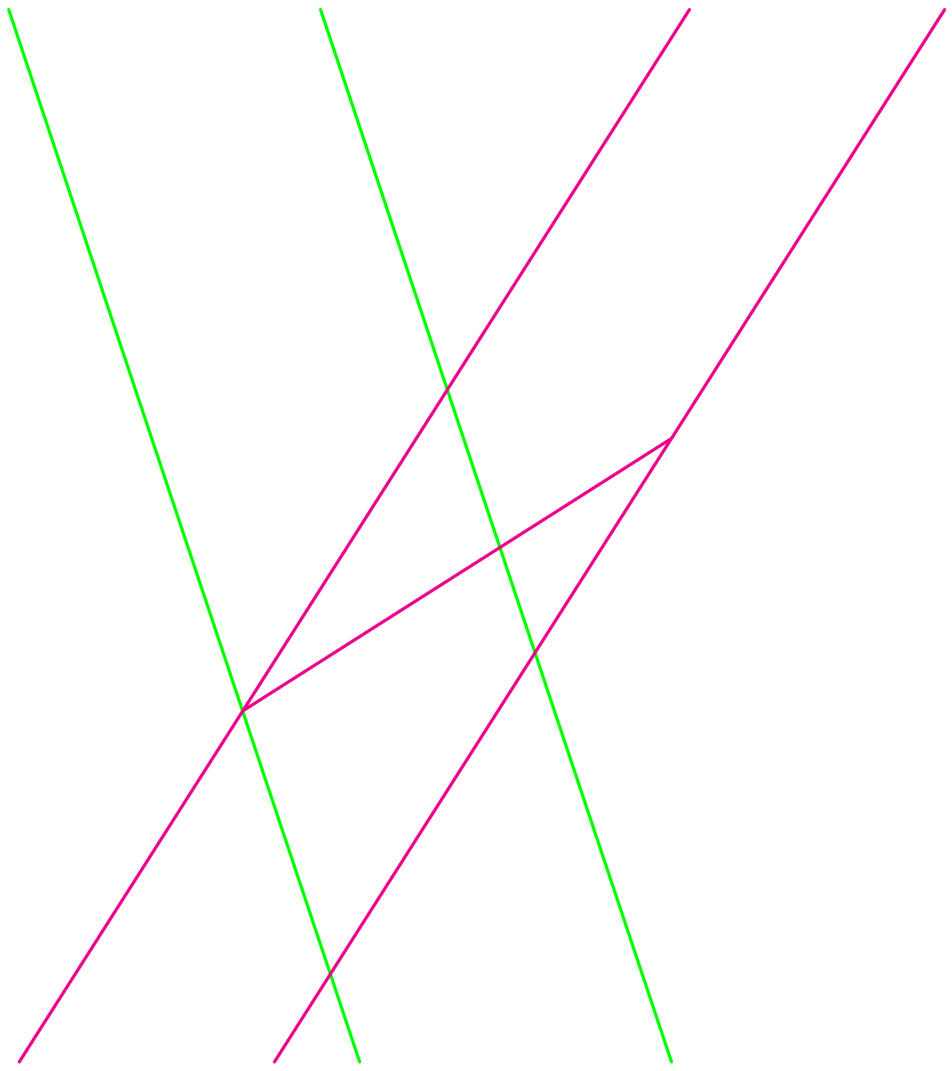


# Längenkontraktion ist gegenseitig



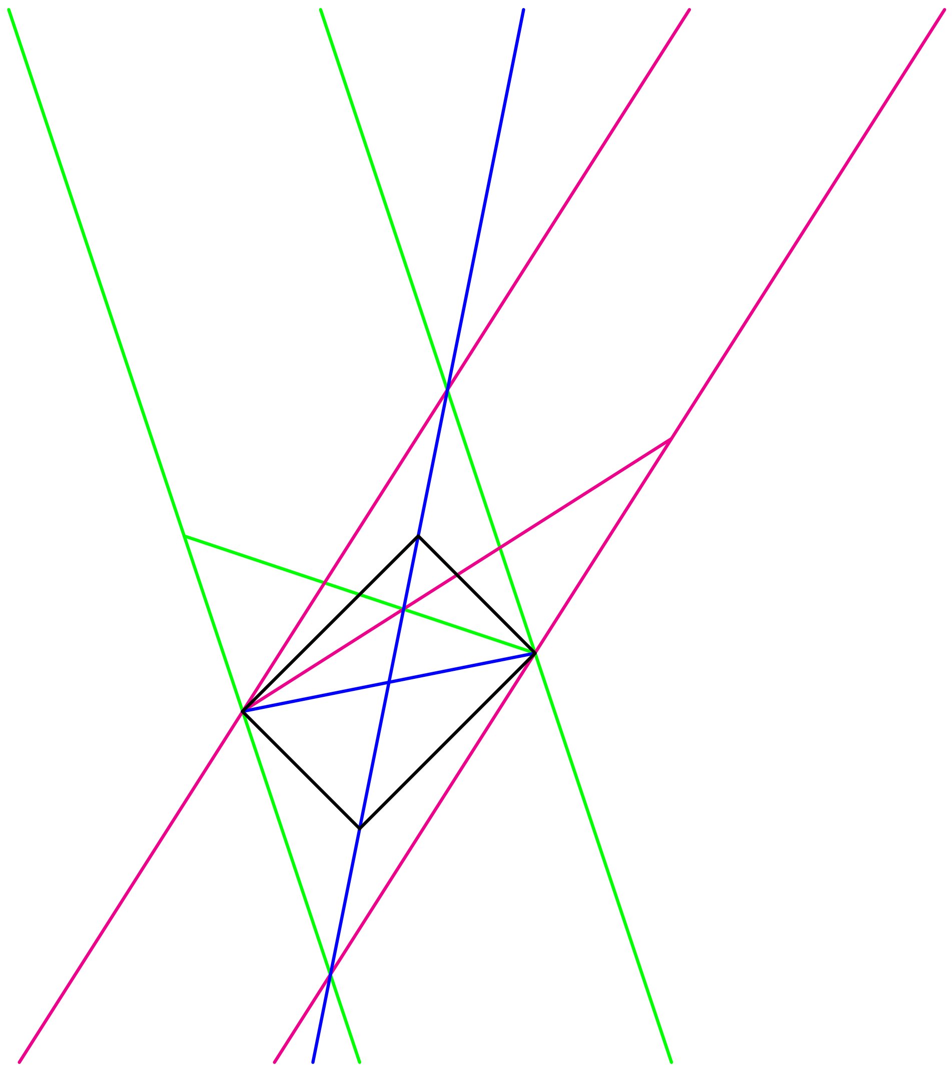
$$l(v) = \sqrt{1 - v^2}\, l(0)$$

# Längenkontraktion ist gegenseitig



$$l(v) = \sqrt{1 - v^2}\, l(0)$$

## Alle Linien



# Zusammenfassung

Die vierdimensionale Raumzeit besteht aus Ereignissen.

Geometrische Strukturen: Weltlinien freier Teilchen, Lichtkegel, Uhrzeit

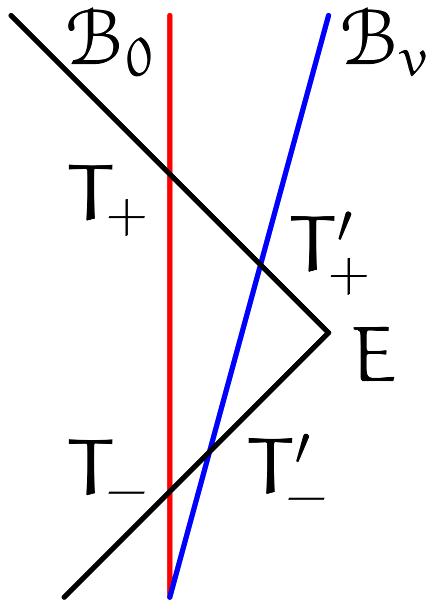
Bewegte Uhren werden dopplerverschoben gesehen.

Auch nach Korrektur von Lichtlaufzeit gehen bewegte Uhren langsamer.

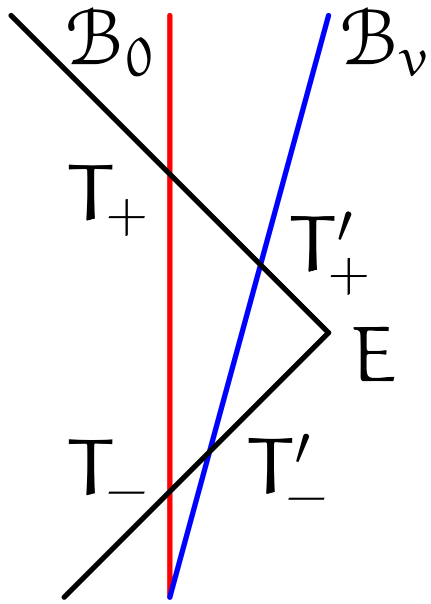
Zeit zwischen zwei Ereignissen hängt von der Weltlinie der Uhr ab.

Minkowki-Geometrie ist ungewohnt, aber Euklidischer Geometrie ähnlich.

# Lorentztransformation



# Lorentztransformation




$$T'_+ = k^{-1}\ T_+$$
$$T'_- = k\ \ \ \ T_-$$

$$t' = \frac{t - v\,x}{\sqrt{1-v^2}}$$
$$x' = \frac{-v\,t + x}{\sqrt{1-v^2}}$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

$$t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$