

LÖSUNGSSKIZZE

Wie immer ist dies nur eine knappe Skizze eines möglichen Lösungsweges.

[H33] Gravitation **[2 + 2 = 4 Punkte]**

Im folgenden kürze ich ab: $g_{\text{Erde}} = g$, $M_{\text{Erde}} = M$, $R_{\text{Erde}} = R$ und $G_{\text{Newton}} = G_N$.

- (a) Wir haben $\vec{F} = -\text{grad}V = -\frac{mMG_N}{r^3}\vec{r}$. An der Erdoberfläche ergibt sich damit $\vec{F} = -\frac{mMG_N}{R^2}\vec{e}_r = -mg\vec{e}_z$, wobei wir vereinbaren, dass die z -Achse des lokalen Koordinatensystems nach oben zeigt. Also finden wir $g = \frac{MG_N}{R^2}$.
- (b) Bei Fluchtgeschwindigkeit kann das Teilchen entweichen. Der Energiesatz besagt $E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = 0$, also $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{mMG_N}{R} = 0$, da die kinetische Energie die potentielle dann genau kompensiert. Auflösen nach v ergibt $v = \sqrt{2\frac{MG_N}{R}} = \sqrt{2gR}$.

[H34] Mathematisches Pendel **[2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 8 Punkte]**

Das Fadenpendel habe eine Länge r . In Kugelkoordinaten ist dann $r = \text{const}$. Insbesondere haben wir

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = r\dot{\theta} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} + r\dot{\varphi} \sin \theta \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Die Drehimpulskomponente L_z ist aufgrund der Rotationssymmetrie um die z -Achse erhalten. Die Wahl des Winkels φ ist beliebig und entspricht nur der beliebigen Wahl der Ausrichtung der x -Achse. Die Gesamtenergie ist erhalten, weil die Zeit im System beliebig gewählt werden kann. Das entspricht der beliebigen Wahl, wie ich meine Uhr gestellt habe, bevor ich mit der Beobachtung und Messung des Pendels beginne.
- (b) Es gilt $E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}m(\dot{\vec{r}})^2 + mgz$. Wir müssen $(\dot{\vec{r}})^2$ bilden:

$$\begin{aligned} (\dot{\vec{r}})^2 &= r^2\dot{\theta}^2 \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \\ &+ r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ 2r^2\dot{\theta}\dot{\varphi} \sin \theta \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2). \end{aligned}$$

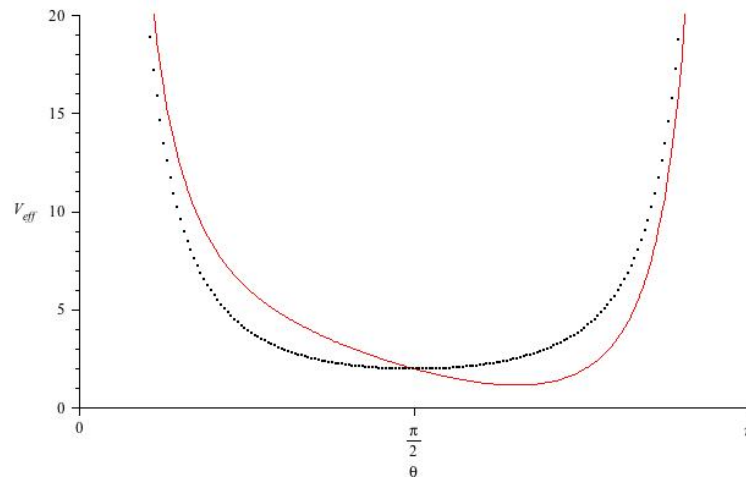
Damit folgt sofort das gesuchte Ergebnis $E = \frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + mgr \cos \theta$. Es gilt $L_z = m(xy\dot{z} - y\dot{x})$. Einsetzen der Komponenten liefert

$$\begin{aligned} L_z &= mr^2\dot{\theta}(\sin \theta \cos \varphi \cos \theta \sin \varphi - \sin \theta \sin \varphi \cos \theta \cos \varphi) - mr^2\dot{\varphi} \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi - (-)\sin^2 \varphi) \\ &= mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

- (c) Wir finden $\dot{\varphi} = \frac{L_z}{mr^2 \sin^2 \theta}$. Im folgenden schreiben wir einfach L für L_z .

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mr^2 \sin^2 \theta \frac{L^2}{m^2r^4 \sin^4 \theta} + mgr \cos \theta \\ &= \frac{1}{2}M\dot{\theta}^2 + \frac{L^2}{2M \sin^2 \theta} + mrg \cos \theta \\ &= \frac{1}{2}M\dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}. \end{aligned}$$

Eine Skizze des effektiven Potentials sieht in etwa so aus, wobei die schwarze Linie den reinen Drehimpulsbeitrag zeigt, die rote das vollständige effektive Potential (die Einheiten der Achse für V_{eff} sind rein willkürlich):



(d) Wir entwickeln das effektive Potential um sein Minimum, das gerade bei $\bar{\theta}$ liegt:

$$0 = \left. \frac{dV_{\text{eff}}}{d\theta} \right|_{\bar{\theta}} = -mgr \sin \bar{\theta} + \frac{L^2(-2)}{2mr^2 \sin^3 \bar{\theta}} \cos \bar{\theta}.$$

Auflösen nach $L = L_z$ ergibt

$$L_z^2 = -m^2 gr^3 \frac{\sin^4 \bar{\theta}}{\cos \bar{\theta}}.$$

(e) In der Nähe des Minimums bei $\bar{\theta}$ hat das effektive Potential die Form einer Parabel. Somit ist $mr^2 \omega^2 = \left. \frac{d^2 V_{\text{eff}}}{d\theta^2} \right|_{\bar{\theta}}$. Das ergibt

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{1}{mr^2} \left(-mgr \cos \bar{\theta} - \frac{L^2(-3)}{mr^2 \sin^4 \bar{\theta}} \cos^2 \bar{\theta} + \frac{L^2}{mr^2 \sin^2 \bar{\theta}} \right) \\ &= \frac{1}{mr^2} \left(-mgr \cos \bar{\theta} - \frac{3 \cos^2 \bar{\theta}}{mr^2 \sin^4 \bar{\theta}} m^2 gr^3 \frac{\sin^4 \bar{\theta}}{\cos \bar{\theta}} - \frac{m^2 gr^3}{mr^2 \sin^2 \bar{\theta}} \frac{\sin^4 \bar{\theta}}{\cos \bar{\theta}} \right) \\ &= -\frac{1}{mr^2} \left(mgr \cos \bar{\theta} + 3mgr \cos \bar{\theta} + mgr \left(\frac{1}{\cos \bar{\theta}} - \cos \bar{\theta} \right) \right) \\ &= -\frac{g}{r} \left(3 \cos \bar{\theta} + \frac{1}{\cos \bar{\theta}} \right), \end{aligned}$$

wobei wir L_z aus (d) eingesetzt und vereinfacht haben.

[H35*] Ellipsenbahn im Keplerproblem

[2* + 2* + 2* = 6* Extrapunkte]

Wir verwenden die Definition der Polarkoordinaten, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Weiter wissen wir, dass $r^2 = x^2 + y^2$ ist. So finden wir

$$e \cos \varphi + 1 = \frac{p}{r} \implies ex + r = p \implies r = (p - ex).$$

Einsetzen von r^2 und Ausmultiplizieren liefert

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = r^2 &= (p - ex)^2 = p^2 - 2epx + e^2 x^2 && \implies \\ (1 - e^2)x^2 + 2epx + y^2 &= p^2 && \implies \\ (1 - e^2) \left(x + \frac{ep}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 &= p^2 + \frac{e^2 p^2}{1 - e^2} = \frac{p^2}{1 - e^2} && \implies \\ \frac{\left(x + \frac{ep}{1 - e^2} \right)^2}{\frac{p^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2}{1 - e^2}} &= 1. \end{aligned}$$

Daraus lesen wir die gewünschte Form ab,

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

mit $x_0 = -\frac{ep}{1-e^2}$, $a = \frac{p}{1-e^2}$, $b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$ und $y_0 = 0$.

Das Abstandsquadrat von $(-\frac{2ep}{1-e^2}, 0)$ zu einem Ellipsenpunkt ist

$$\begin{aligned} \ell_2^2 &= \left(x + \frac{2ep}{1-e^2}\right)^2 + y^2 = x^2 + \frac{4ep}{1-e^2}x + \frac{4e^2p^2}{1-e^2} + y^2 \\ &= x^2 + \frac{4p}{1-e^2}(p-r) + \frac{4e^2p^2}{1-e^2} + y^2 \\ &= r^2 - 2r\frac{2p}{1-e^2} + \frac{4p^2}{1-e^2} \\ &= \left(r - \frac{2p}{1-e^2}\right)^2 \\ &= (2a - r)^2, \end{aligned}$$

wobei wir $ex = p - r$, die definierende Gleichung der Ellipse, verwendet haben. Das Abstandsquadrat zum Ursprung ist einfach $\ell_1^2 = r^2$. Nun beachten wir, dass immer $2a > r$ gilt, da $r_{\max} = \frac{p}{1-e} < \frac{2}{1+e} \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2}$ ist (Erinnerung: $0 \leq e < 1$). Damit folgt, dass $2a - r > 0$ ist, und so können wir $\ell_1 + \ell_2 = r + (2a - r) = 2a = \text{const}$ schreiben.