

KEPLERPROBLEM IM INNERN, AUFGABE [H37]

Wir bezeichnen mit G_N die Newton'sche Gravitationskonstante, mit R und M den Erdradius und die Erdmasse und mit ρ die mittlere Dichte der Erde, die sich ergibt, wenn man annimmt, dass die Erde eine Kugel mit homogener Massendichte ist. Dann ist nämlich $M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$.

- (a) Für $r \geq R$ ist das Gravitationspotential $V_>(r) = -\frac{G_N M}{r}$. Innerhalb der Erde, $r \leq R$, ist es laut Aufgabenstellung von der Form $V_<(r) = \frac{1}{2}\kappa r^2 + C$. Es muss daher für $r = R$ gelten: $V_<(R) = V_>(R)$ und $\partial_r V_<(r)|_{r=R} = \partial_r V_>(r)|_{r=R}$. Daraus folgt

$$-\frac{G_N M}{R} = \frac{1}{2}\kappa R^2 + C, \quad \text{und} \quad \frac{G_N M}{R^2} = \kappa R.$$

Also ist $\kappa = \frac{G_N M}{R^3}$ und $C = -\frac{3}{2}\frac{G_N M}{R}$. Konkret haben wir $G_N = 6.67384 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$, $M = 5.9736 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ und $R = 6.36747 \cdot 10^6 \text{ m}$. Daraus ergibt sich $\kappa = 15442 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2}$. Die Kraft auf ein Teilchen der Masse m ist demnach $F = -\text{grad}V_<(r)m = -m\kappa r$. Wir können daraus ablesen, dass $\omega = \sqrt{\kappa} = 1.2427 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ist. Das entspricht übrigens einer Schwingungsdauer von $2\pi/\omega = 5056 \text{ s} \approx 84 \text{ min}$.

- (b) Das erste Kepler'sche Gesetz besagt, dass die Bahnen von Massen im Gravitationsfeld Ellipsen sind. Im Inneren haben wir stattdessen das Potential $V = \frac{1}{2}\kappa(x^2 + y^2 + z^2)$. Dies ist vollständig rotationssymmetrisch. Aus dem allgemeinen Ansatz $x = x_0 \cos(\omega t + \varphi_x)$, $y = y_0 \cos(\omega t + \varphi_y)$ und $z = z_0 \cos(\omega t + \varphi_z)$ können wir o.B.d.A $z = 0$ setzen, weil Drehimpulserhaltung besagt, dass die Bewegung in einer Ebene erfolgt. Das Koordinatensystem können wir dann so wählen, dass z senkrecht zu dieser Ebene steht. Weiter können wir wegen Energieerhaltung die Zeit so wählen, dass die maximale Auslenkung gerade bei $t = 0$ in x -Richtung erfolgt. Dann reduziert sich der allgemeine Ansatz auf $x = x_0 \cos(\omega t)$, $y = y_0 \sin(\omega t)$ und $z = 0$. Quadriert man x und y jeweils, so findet man leicht

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 = 1,$$

also die Bestimmungsgleichung einer Ellipse.

Bemerkung: Diese Ellipse liegt symmetrisch um den Ursprung im Erdmittelpunkt. Daher variiert r zweimal vom Maximum zum Minimum und zurück pro Umlauf. Bei einer Keplerbahn außerhalb der Erde liegt der Ursprung in einem der Brennpunkte der Ellipse, und so variiert r nur einmal vom Maximum zum Minimum und zurück pro Umlauf. Zwar sind die Bahnen in beiden Fällen Ellipsen, aber es gibt dennoch charakteristische Unterschiede.

- (c) Das zweite Kepler'sche Gesetz ist der Flächensatz: in gleichen Zeiten werden gleiche Flächen überstrichen. Dieses Gesetz ist lediglich eine Konsequenz der Drehimpulserhaltung, aus der folgt, dass $\frac{1}{2}r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{m}L = \text{const}$ die konstante Flächengeschwindigkeit ist. Nun beschreibt $r \cdot r d\varphi = r \cdot r \dot{\varphi} dt$ gerade das infinitesimale Flächenelement, das in der infinitesimalen Zeit dt überstrichen wird. Auch dies ist konstant. Also gilt das zweite Kepler'sche Gesetz auch im Innern einer homogenen Massenkugel.
- (d) Das dritte Kepler'sche Gesetz stellt einen Zusammenhang zwischen Umlaufzeit und Amplitude der Bahn dar. Die Amplitude wird durch die große Halbachse a angegeben, und der Zusammenhang ist $T^2 \propto a^3$ außerhalb des Erdradius. Dieses Gesetz kann im Innern der Erde, wo das Potential das eines harmonischen Oszillators ist, nicht gelten! Denn beim harmonischen Oszillator ist die Umlaufzeit völlig unabhängig von der Amplitude.
- (e) Eigentlich haben wir das schon in (a) ausgerechnet, als wir ω bestimmt haben. Wir können aber auch argumentieren, dass die Umlaufzeit (also der Fall durch die ganze Erde bis ans andere Ende und wieder zurück) die gleiche sein muss, wie die Umlaufzeit eines Satelliten in einem sehr erdnahen Orbit. Wir haben $T^2 = \frac{4\pi^2}{G_N M} a^3$ mit $a \approx R$ und somit $T = 5056 \text{ s}$.