

ZYKLOIDE IN [H24]

Die Bahnkurve, die ein Punkt auf dem Rand eines rollenden Rades mit Einheitsdurchmesser beschreibt, heißt Zykloide. Sie lässt sich folgendermaßen angeben:

$$f(y) = f(0) - \sqrt{y(1-y)} + \operatorname{arccot} \sqrt{\frac{1-y}{y}}.$$

(a) Die Ableitung dieser Funktion ist nicht ganz einfach zu berechnen. Zunächst erinnern wir uns an [P20], wo wir die Ableitung von \arctan bestimmt haben, $\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Da $\operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$, findet man sofort $\frac{d}{dx} \operatorname{arccot}(x) = \frac{-1}{1+x^2}$. Also erhalten wir

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{d}{dy} f(y) = -\frac{d\sqrt{y}}{dy} \sqrt{1-y} - \sqrt{y} \frac{d\sqrt{1-y}}{dy} + \left(\frac{d \operatorname{arccot}(z)}{dz} \frac{dz}{dy} \right) \Big|_{z=\sqrt{\frac{1-y}{y}}} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{y}} \sqrt{1-y} - \sqrt{y} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-y}} (-1) + \left(\frac{-1}{1+\frac{1-y}{y}} \right) \frac{d}{dy} \sqrt{\frac{1-y}{y}} \\ &= \frac{1}{2} \left(-\sqrt{\frac{1-y}{y}} + \sqrt{\frac{y}{1-y}} \right) + \left(\frac{-1}{\frac{1}{y}} \right) \left(\frac{d\sqrt{1-y}}{dy} \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{1-y} \frac{dy^{-1/2}}{dy} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-\sqrt{\frac{1-y}{y}} + \sqrt{\frac{y}{1-y}} \right) + (-y) \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(1-y)y}} (-1) - \frac{1}{2} \sqrt{1-y} \frac{1}{y^{3/2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{2y-1}{\sqrt{y(1-y)}} - \frac{1}{2} \left(-\sqrt{\frac{y}{1-y}} - \sqrt{\frac{1-y}{y}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{2y-1}{\sqrt{y(1-y)}} - \frac{1}{2} \frac{-1}{\sqrt{y(1-y)}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2y}{\sqrt{y(1-y)}} \\ &= \sqrt{\frac{y}{1-y}}. \end{aligned}$$

(b) Wir setzen $y(\varphi) = \frac{1}{2}(1 - \cos \varphi)$. Nun ist $\cos \varphi = \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$. Damit findet man $y(\varphi) = \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$. Beachtet man, dass dann $1-y = \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ ist, so erhalten wir

$$\begin{aligned} f(y(\varphi)) &= f(0) - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \operatorname{arccot} \frac{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \\ &= f(0) - \frac{1}{2} \sin \varphi + \operatorname{arccot}(\cot\left(\frac{\varphi}{2}\right)) \\ &= f(0) - \frac{1}{2} \sin \varphi + \frac{\varphi}{2} \\ &= f(0) + \frac{1}{2}(\varphi - \sin \varphi). \end{aligned}$$

Und für die Ableitung finden wir

$$g(y(\varphi)) = \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

(c) Wir setzen $f(0) = 0$. Dann ist der Ortsvektor gegeben als

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f(y(\varphi)) \\ y(\varphi) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\varphi - \sin \varphi) \\ \frac{1}{2}(1 - \cos \varphi) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varphi - \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit sieht man, dass die Zykloide gegeben ist als die Überlagerung der Bewegung der Radnabe in der Höhe $1/2$, die sich mit zunehmendem Winkel φ um die Kreisbogenlänge $\varphi/2$ nach rechts bewegt, und des Vektors $-1/2(\sin \varphi, \cos \varphi)$, der anfangs für $\varphi = 0$ von der Radachse zum untersten Punkt des Rades zeigt und mit zunehmendem φ im Uhrzeigersinn um den Winkel φ gedreht wird. Plottet man das, so bekommt man folgenden Graphen:

