

LÖSUNGSSKIZZE PROBEKLAUSUR

Dies ist nur eine Lösungsskizze. Rechnungen sind nicht immer bis ins letzte Detail ausgeführt. Und es gibt oft auch andere Wege zur richtigen Lösung. Die Endergebnisse können aber in jedem Fall zur Kontrolle dienen.

**[K0] Kurzfragen** **[1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 Punkte]**

Alle Fragen lassen sich in einem Satz oder mit einer Formel beantworten.

- (a) Symmetrie unter Translationen impliziert Impulserhaltung.
- (b) Der Tangentialvektor der Bahnkurve  $\vec{r}(t)$  ist  $\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ .
- (c)  $\vec{F} = -\text{grad}V = -\text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\vec{r}}{r^3}$ .
- (d)  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ .
- (e) Die Matrix  $M$  erhalte alle Längen,  $|M\vec{x}|^2 = |\vec{x}|^2$ . Dann ist  $\det M = \pm 1$ , wobei  $\det M = +1$  Drehungen, und  $\det M = -1$  Spiegelungen sind.
- (f) Das Skalarprodukt kann mit der Polarisationsformel durch Längenquadrate ausgedrückt werden:  

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} \left( (\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2 \right).$$

**[K1] Drehimpuls** **[2 Punkte]**

Nach Definition des Drehimpulses,  $\vec{L}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t)$ , ist  $\vec{r}(t) \cdot \vec{L}(t) = 0$ . Drehimpulserhaltung sagt  $\vec{L}(t) = \vec{L}(0)$  für alle Zeiten  $t$ . Also  $\vec{r}(t) \cdot \vec{L}(0) = 0$ . Daher liegt die Bahn  $\vec{r}(t)$  in einer Ebene, die senkrecht zu  $\vec{L}(0)$  steht und durch den Ursprung geht.

**[K2] Drehungen** **[2 + 2 = 4 Punkte]**

Es bezeichne  $\vec{n}$  einen Einheitsvektor, der eine Drehachse vorgibt, und  $\alpha$  den Drehwinkel.

- (a) Für jeden Vektor  $\vec{u}$  gilt  $\vec{u} = \vec{u}_{\parallel} + \vec{u}_{\perp}$  mit  $\vec{u}_{\parallel} = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{u})$  und  $\vec{u}_{\perp} = \vec{u} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{u})$ .
- (b)  $D_{\alpha\vec{n}}\vec{u} = \vec{u}_{\parallel} + \vec{u}_{\perp} \cos \alpha + (\vec{n} \times \vec{u}) \sin \alpha = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{u}) + (\cos \alpha)(\vec{u} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{u})) + (\sin \alpha)(\vec{n} \times \vec{u})$ .

**[K3] Summenkonvention** **[2 + 1 + 1 = 4 Punkte]**

Für das  $\epsilon$ -Symbol gilt

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}.$$

Für die Kontraktionen in ein, zwei und drei Indizes ergibt sich

- (a)  $\epsilon_{ijn}\epsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ ,
- (b)  $\epsilon_{imn}\epsilon_{lmn} = 2\delta_{il}$  und
- (c)  $\epsilon_{lmn}\epsilon_{lmn} = 6$ .

**[K4] Eigenwerte und Eigenvektoren** **[2 + 2 = 4 Punkte]**

Gegeben sei eine reelle  $2 \times 2$  Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- (a) Für das charakteristische Polynom finden wir

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda\mathbb{1}) &= (a - \lambda)(d - \lambda) - bc \\ &= \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) \\ &= \lambda^2 - \text{Sp}(M)\lambda + \det(M). \end{aligned}$$

- (b) Es folgt aus  $\det(M - \lambda\mathbb{1}) = 0$ , dass die Eigenwerte gegeben sind als

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}\text{Sp}(M) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\text{Sp}(M)^2 - 4\det(M)}.$$

Die Eigenwerte sind offenbar reell, wenn die Diskriminante  $\text{Sp}(M)^2 - 4\det(M) \geq 0$  ist, wenn also  $\det(M) \leq (\frac{1}{2}\text{Sp}(M))^2$  ist.

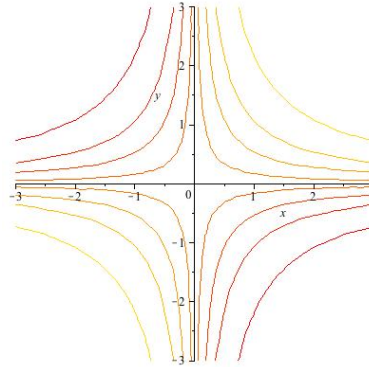
**[K5] Kräfte und Potentiale** **[2 + 2 = 4 Punkte]**

Kräfte besitzen ein Potential, wenn die Rotation verschwindet.

(a) Wir betrachten  $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{y}{1+x^2y^2}, \frac{x}{1+x^2y^2}, 0\right)$ .

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{F} &= (\partial_y F_z - \partial_z F_y, \partial_z F_x - \partial_x F_z, \partial_x F_y - \partial_y F_x) \\ &= (0, 0, (-1)\frac{x}{(1-x^2y^2)^2}2xy^2 - (-1)\frac{y}{(1-x^2y^2)^2}2yx^2) \\ &= (0, 0, 0).\end{aligned}$$

Also gibt es ein Potential  $V$  mit  $\vec{F} = -\operatorname{grad}V$ . Mit dem Hinweis ergibt sich sofort  $V = -\arctan(xy)$ . Die Äquipotentiallinien in der  $xy$ -Ebene bei  $z = 0$  sind die Linien, bei denen  $\arctan(xy) = \text{const}$  ist. Das ist offenbar der Fall, wenn  $xy = \text{const}$  ist, also  $y \propto 1/x$ . Die Äquipotentiallinien sind also Hyperbeln.



(b) Wir betrachten  $\vec{F}(x, y, z) = (y/z, -x/z, z^2/xy)$ .

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{F} &= (\partial_y F_z - \partial_z F_y, \partial_z F_x - \partial_x F_z, \partial_x F_y - \partial_y F_x) \\ &= \left((-1)\frac{z^2}{xy^2} - (-1)\frac{-x}{z^2}, (-1)\frac{y}{z^2} - (-1)\frac{z^2}{x^2y}, \frac{-1}{z} - \frac{1}{z}\right) \\ &\neq 0.\end{aligned}$$

Die Rotation verschwindet nicht, es gibt also kein skalares Potential.

Hinweis:  $\partial_u \arctan(uv) = \frac{v}{1+u^2v^2}$ .

**[K6] Harmonischer Oszillator**

**[2 + 2 = 4 Punkte]**

In einem ein-dimensionalen Problem wirke eine Kraft  $F = -kx$ . Die zugehörige Bewegungsgleichung ist also  $F = m\ddot{x} = -kx$  oder  $m\ddot{x} + kx = 0$ . Die allgemeine Lösung ist  $x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$  mit  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Wir können das durch eine einzige trigonometrische Funktion ausdrücken, indem wir  $x(t) = X_{\max} \sin(\omega t + \varphi)$  schreiben. Dabei ist  $X_{\max} = \sqrt{A^2 + B^2}$  und  $\tan \varphi = B/A$ . Denn mit dem Additionstheorem ist  $X_{\max} \sin(\omega t + \varphi) = X_{\max} \sin(\omega t) \cos \varphi + X_{\max} \cos(\omega t) \sin \varphi$ . Daraus liest man ab:  $A = X_{\max} \cos \varphi$  und  $B = X_{\max} \sin \varphi$ . Also sind  $X_{\max}$  und  $\varphi$  nichts anderes als die Polarkoordinaten für den Punkt  $(B, A)$  in der Ebene der Integrationskonstanten.