Präsenzübung XI zur Vorlesung MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK WiSe 2011/12
Prof. Dr. Norbert Dragon
09.-11.01.2012 PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

LÖSUNGSSKIZZE ZUM HARMONISCHER OSZILLATOR

Wir beschränken uns auf die durchzuführenden Rechnungen. Die erforderlichen Erläuterungen und die Diskussion der Ergebnisse sind angepasst an die jeweilige Übungsgruppe selbständig durchzuführen.

[P28] *Nur mit Dämpfung*
Wir betrachten einen harmonischen Oszillator, beschrieben durch die Kraft $F = -kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$. Hierbei liegt die physikalisch oft gute Annahme zu Grunde, dass die Dämpfung proportional zur Geschwindigkeit der Schwingung ist.

(a) Die Gleichung $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ lässt sich leicht schreiben als
$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$
mit $2\zeta\omega_0 = c/m$ und $\omega_0^2 = k/m$. Also ist die Kreisfrequenz $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ und das Dämpfungsverhältnis $\zeta = c/(2m\omega_0) = c\sqrt{m/k}/(2m) = c/\sqrt{4km}$.

(b) Wir machen einen Exponential-Ansatz $x(t) = \exp(\lambda t)$. Damit finden wir
$$(\lambda^2 + 2\zeta\omega_0\lambda + \omega_0^2)x(t) = 0\,.$$
Da dies für alle Zeiten t gilt, muss das Polynom $\lambda^2 + 2\zeta\omega_0\lambda + \omega_0^2$ verschwinden. Dies ergibt die Lösungen
$$\lambda_\pm = -\zeta\omega_0 \pm \mathrm{i}\sqrt{1-\zeta^2}\omega_0\,.$$

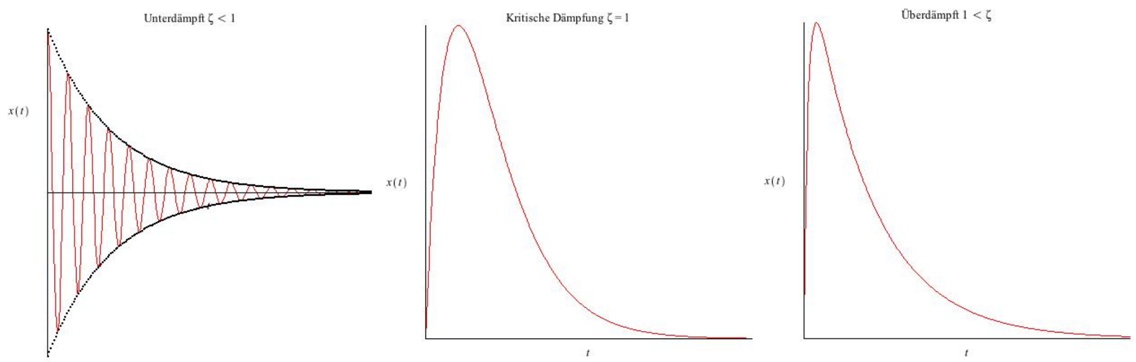
Wir führen nun eine Fallunterscheidung für $\zeta > 1$, $\zeta < 1$ und $\zeta = 1$ durch.

(c) Im unterdämpften Fall $\zeta < 1$ ist die Lösung also eine Schwingung mit der Frequenz $|\mathrm{Im}(\lambda_\pm)| = \omega_1 = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$, die also von der Eigenschwingungsfrequenz ω_0 des ungedämpften Oszillators um so mehr abweicht, je größer die Dämpfung ist. Diese Schwingung fällt exponentiell mit $\mathrm{Re}(\lambda_\pm) = -\zeta\omega_0$ ab. Im Fall $\zeta = 0$ gibt es keine Dämpfung und $\omega_1 = \omega_0$. Wir erhalten also die gewohnte ungedämpfte Schwingung des freien harmonischen Oszillators.

(d) Im Fall $\zeta > 1$ haben wir rein reelle Nullstellen, $\lambda_\pm = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2-1}$. Die Lösung schwingt also nicht, sondern fällt exponentiell ab.

(e) Im Fall kritischer Dämpfung (auch aperiodischer Grenzfall genannt) ist $\zeta = 1$ und wir haben eine doppelte Nullstelle, $\lambda_+ = \lambda_- = -\omega_0$. Unser Ansatz liefert also zwei identische Lösungen. Um eine zweite, linear unabhängige, Lösung zu erhalten, machen wir einen weiteren Ansatz: $x(t) = t\exp(\lambda t)$. Einsetzen in die Gleichung für $\zeta = 1$ ergibt
$$\big((\lambda^2 t + 2\lambda) + 2\omega_0(1+\lambda t) + \omega_0^2 t\big)\exp(\lambda t) = (\omega_0+\lambda)(2 + (\omega_0+\lambda)t)\exp(\lambda t) \overset{!}{=} 0\,.$$
Offensichtlich ist dies für $\lambda = -\omega_0$ erfüllt.

Zum Abschluss einfache Skizzen der Lösung $x(t)$ in den drei Fällen,



[P29] *Mit harmonischer Anregung*
Zusätzlich zur Dämpfung werde der harmonische Oszillator nun mit einer harmonischen Schwingung der Frequenz ω angetrieben. Wir haben also nun die inhomogene Differentialgleichung
$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = a\cos(\omega t)\,.$$

(a) Einsetzen von $A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t)$ in die inhomogene Gleichung ergibt

$$-\omega^2(A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t))+2\zeta\omega_0\omega(A\cos(\omega t)-B\sin(\omega t))+\omega_0^2(A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t))$$
$$=a\cos(\omega t)\quad\Longrightarrow$$
$$\sin(\omega t)(A\omega_0^2-2B\zeta\omega_0\omega-A\omega^2)=\cos(\omega t)(a+B\omega^2-2A\zeta\omega_0\omega-B\omega_0^2)\,.$$

Der Ansatz löst also die Gleichung, wenn A und B so gewählt werden, dass die Koeffizienten der trigonometrischen Funktionen unabhängig voneinander verschwinden:

$$A=a\frac{2\zeta\omega\omega_0}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega\omega_0)^2}\,,$$
$$B=a\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega\omega_0)^2}\,.$$

(b) Die allgemeine Lösung lautet also demnach

$$x(t)=A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t)+C_1\exp(\lambda_+t)+C_2\exp(\lambda_-t)$$

Nun hat jede allgemeine Lösung des gedämpften freien Oszillators aus [P28] einen nicht verschwindenden Realteil in $\lambda_\pm$, der zu einem exponentiellen Abfall dieser Lösung führt. Für $t\to\infty$ überlebt also am Ende nur die partikuläre Lösung $A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t)$.

(c) Es sei $\zeta<1$. Wir bringen Sie die spezielle Lösung aus (a) in die Form $x(t)=X_{\text{max}}\cos(\omega t-\varphi)$, indem wir zu Polarkoordinaten übergehen. Dann ist $X_{\text{max}}=\sqrt{A^2+B^2}$ und $\tan\varphi=A/B$. Setzt man alles ein und vereinfacht, so erhält man

$$X_{\text{max}}=\frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega\omega_0)^2}}\,,$$
$$\varphi=\arctan\frac{2\zeta\omega\omega_0}{(\omega_0^2-\omega^2)}\,.$$

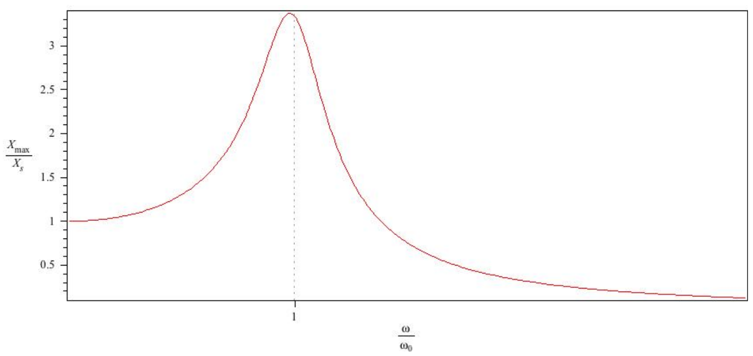
Die maximale Amplitude finden wir, indem wir $\frac{\mathrm{d}X_{\text{max}}}{\mathrm{d}\omega}=0$ setzen. Wir finden

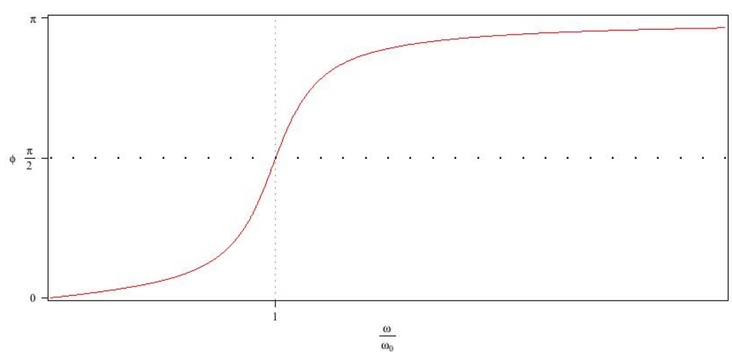
$$\frac{\mathrm{d}X_{\text{max}}}{\mathrm{d}\omega}=-a\frac{1}{2}\frac{8\zeta^2\omega_0^2\omega-4\omega_0^2\omega+4\omega^3}{((\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega\omega_0)^2)^{3/2}}\,.$$

Der Zähler veschwindet, wenn $8\zeta^2\omega_0-4\omega_0^2+4\omega^2=0$ ist, also wenn $\omega=\omega_0\sqrt{1-2\zeta^2}$ wird. Diese Frequenz wird die Resonanzfrequenz ω_r genannt, Resonanz tritt nur auf, wenn $\zeta<1/\sqrt{2}$ ist, also nur für stark unterdämpfte Systeme. Der maximale Wert der Amplitude ergibt sich dann zu

$$X_{\text{max,res}}=\frac{a}{2\omega_0^2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

und kann für kleine Dämpfungen sehr groß werden. Treibt man den Oszillator mit seiner Eigenfrequenz an, d.h., $\omega=\omega_0$, so erreicht er eine Amplitude $X_{\text{max},0}=\frac{a}{2\omega_0^2\zeta}$, was nicht die maximal erreichbare Amplitude ist. Die Resonanzkurve hat bei $\omega=0$ einen endlichen Wert. Dieser gibt die Antwort des Systems auf eine Auslenkung mit konstanter Kraft an. Üblicherweise trägt man die normierte Amplitude X_{max}/X_s auf mit $X_s=a/\omega_0^2$.





Die Skizzen zeigen die Situation für eine Dämpfung $\zeta=0.15$. Man erkennt, dass $\omega_r<\omega_0$ ist, wenn auch nur wenig. Interessant ist die Phasenverschiebung, die in der Nähe von ω_0 am stärksten variiert. Für sehr kleine Anregungsfrequenzen gibt es nahezu keine Phasenverschiebung des Systems, es ist mehr oder weniger im “Takt”. Für sehr große Frequenzen hinkt das System der Anregung um π hinterher, läuft also “gegentaktig”. In der Nähe der Eigenfrequenz hingegen antwortet das System mit einer Phasenverschiebung von $\pi/2$ auf die Anregung: seine Amplitude ist dann maximal, wenn die Anregung gerade den Nulldurchgang hat, und umgekehrt.